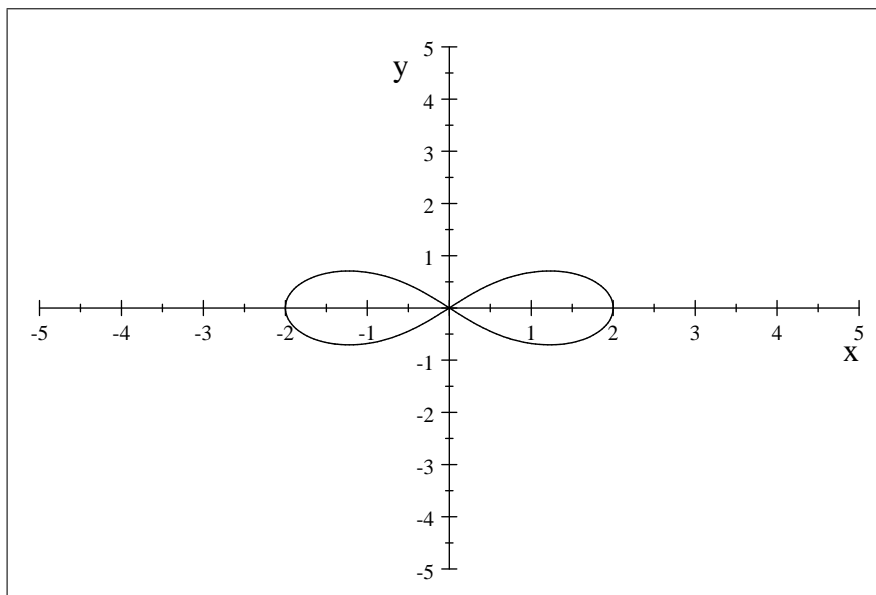


1. Étude de la lemniscate d'équation  $(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2) = 0$



- (a) Donner la paramétrisation de la courbe en coordonnées polaires  
 (b) Tracer son graphe  
 (c) Montrer qu'elle est le lieu des points  $M$  tel que  $|MA| \cdot |MB| = \frac{1}{2}a^2$  où  $A(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $B(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$

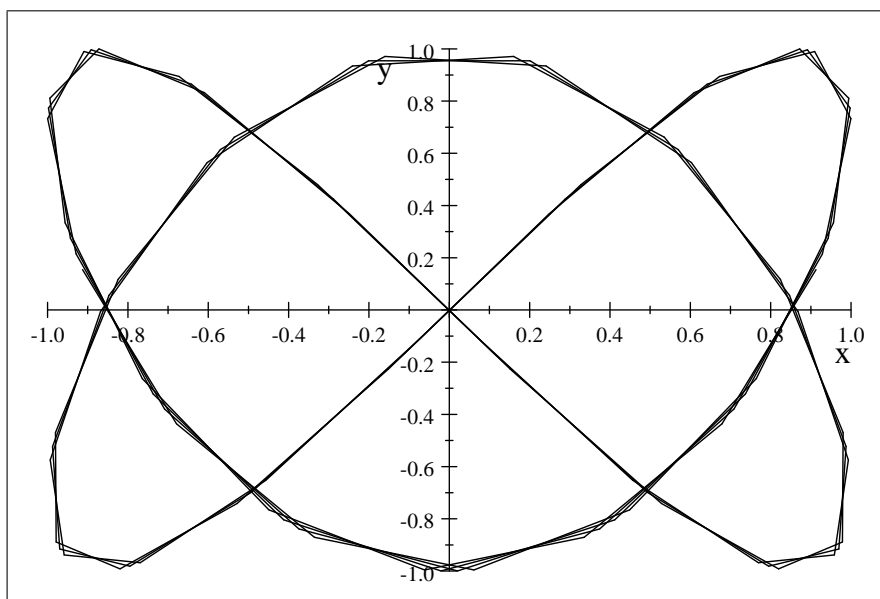
2. Étude de la courbe d'équation  $x^2 + y^2 + xy + x + y = 1$

- (a) Donner une paramétrisation de la courbe en coordonnées cartésiennes  
 (b) En déduire sa nature et calculer la courbure en chacun de ses points

3. Étude de la courbe de Lissajous définie par la paramétrisation

$$x(t) = \sin 4t, \quad y(t) = \cos 6t$$

$$[\sin 4t, \cos 6t]$$



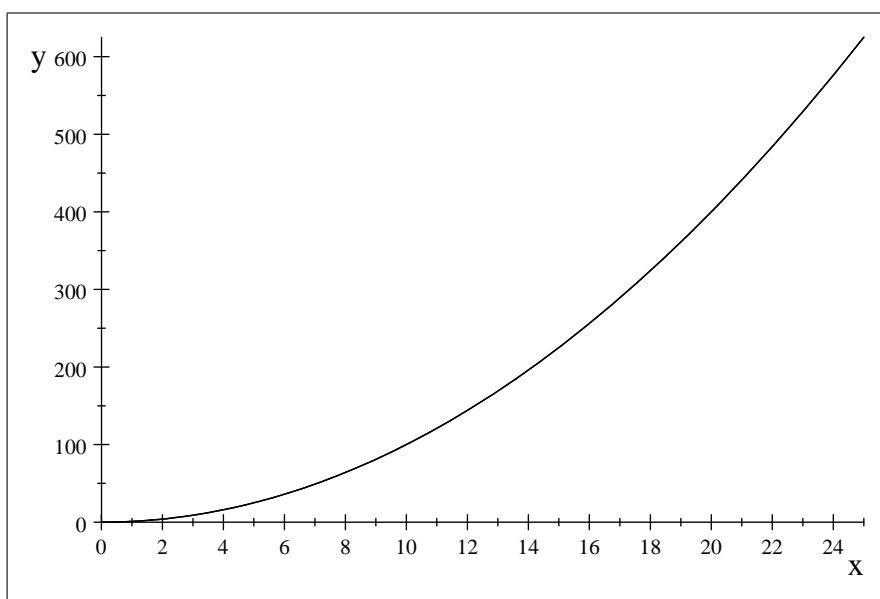
- (a) Étudier le tableau de variation de  $x(t)$  et  $y(t)$
- (b) Expliciter ses points doubles
- (c) Tracer son graphe

4. Étude de la cardioïde définie par la paramétrisation

$$x(t) = \frac{a}{2}(2 \cos t - \cos 2t), \quad y(t) = \frac{a}{2}(2 \sin t - \sin 2t)$$

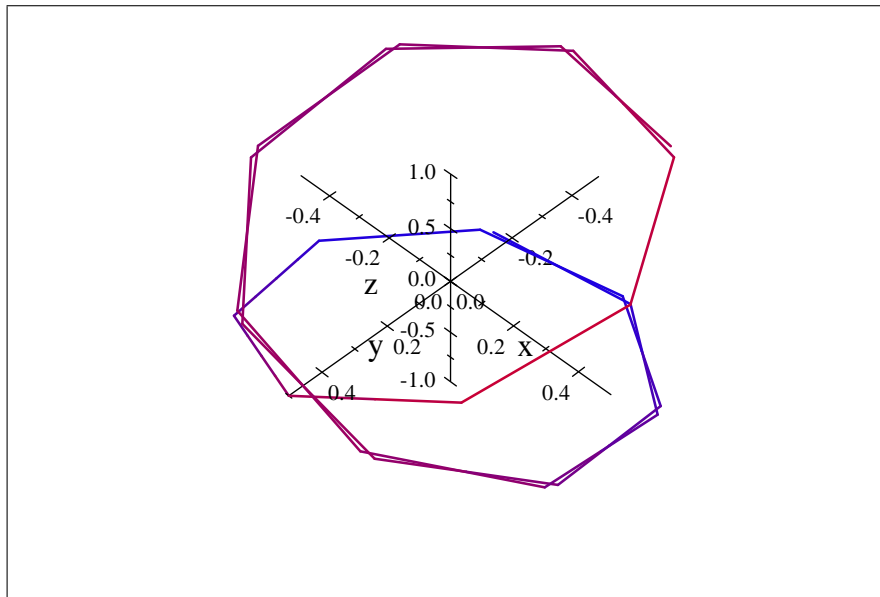
- (a) Tracer son graphe
- (b) Calculer sa courbure

5. La fonction  $\gamma(t) = (t^2, t^4)$



est - elle une paramétrisation de la parabole  $y = x^2$

6. Montrer que  $\gamma(t) = (\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t)$

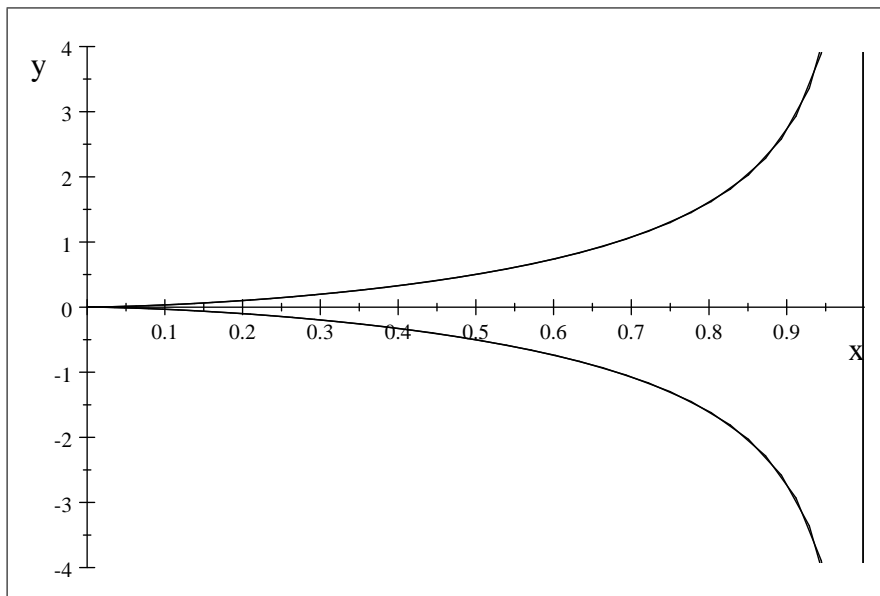


est une paramétrisation de la courbe de Viviani (intersection du cylindre d'axe  $oz$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  avec la sphère unité de centre  $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ )

7. Considérons le cissoïde de Diocles d'équation polaire

$$r(\theta) = \sin \theta \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

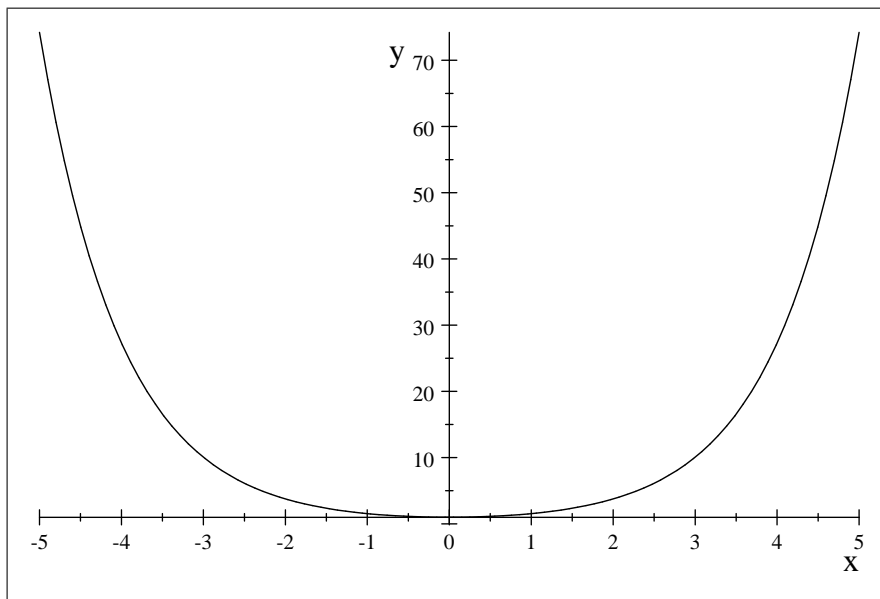
$\sin \theta \tan \theta$



(a) Trouver une paramétrisation de ce cissoïde, en considérant  $\theta$  comme paramètre

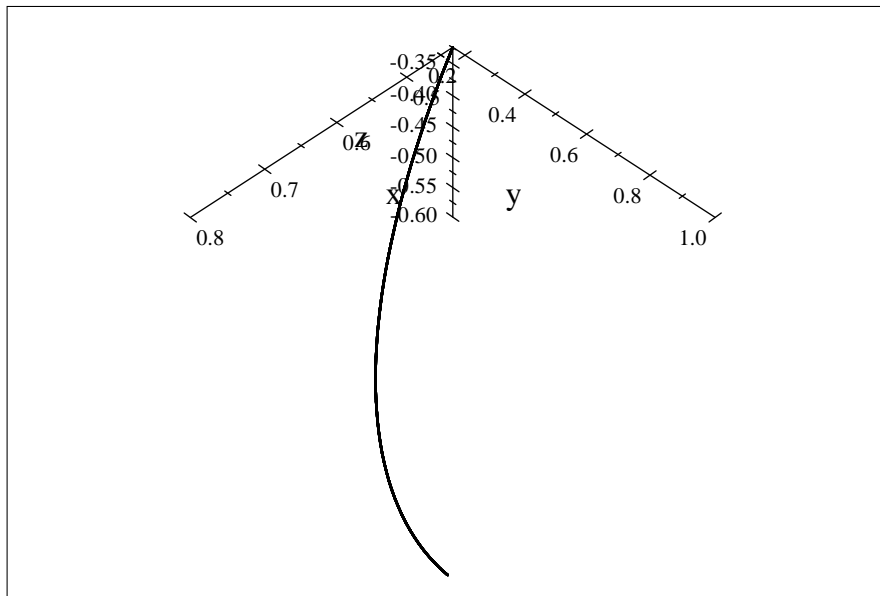
(b) Trouver une reparamétrisation de ce cissoïde sur  $] - 1, 1[$

8. Soit  $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ .

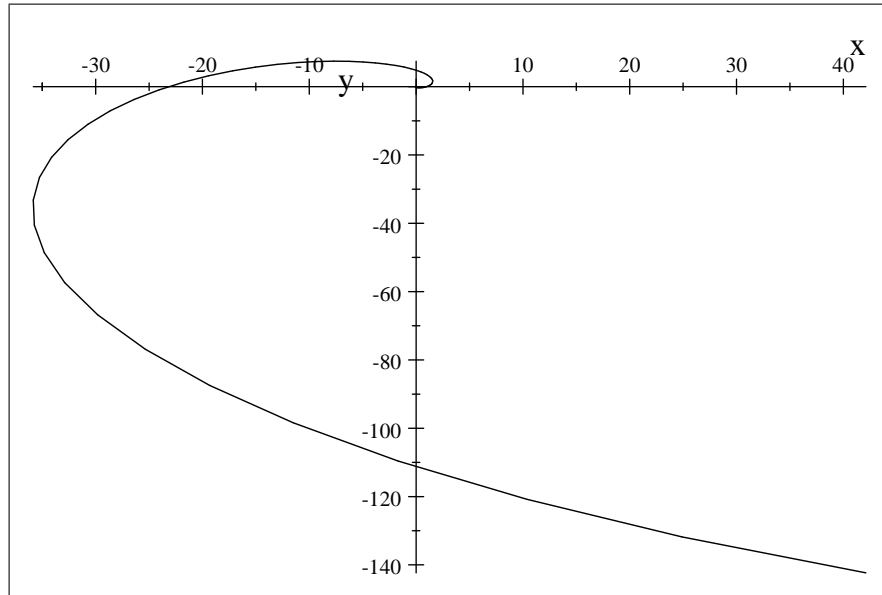


- (a) Montrer que  $\gamma$  est régulière
- (b) Trouver la longueur de l'arc  $\gamma$ , à partir du point  $(0, 1)$
- (c) Trouver une reparamétrisation à vecteur vitesse unitaire de  $\gamma$
- (d) Calculer la courbure de  $\gamma$

9. Trouver la courbure de  $\gamma(t) = (\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t)$



10. Montrer que si  $\gamma(t)$  est une courbe plane à vecteur vitesse unitaire alors  $n'_s = -k_s t$  avec  $n_s, k_s$  et  $t$  sont respectivement, la normale, la courbure orientée et la vitesse
- 
11. Montrer que toute courbe plane régulière dont la courbure est une constante positive, est une partie d'un cercle
- 
12. Soit  $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \in \mathbb{R}, k \neq 0$ . Montrer qu'il existe une paramétrisation  $s$  à vecteur vitesse unitaire unique de  $\gamma$  telle que  $s > 0, \forall t$  et  $s \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et exprimer  $s$  en fonction de  $t$   
 $(e^t \cos t, e^t \sin t)$



Montrer que la courbure orientée de  $\gamma$  est  $\frac{1}{ks}$ . Réciproquement, décrire toute courbe ayant pour courbure  $\frac{1}{ks}, k \neq 0$

---

13. Une courbe plane à vecteur vitesse unitaire  $\gamma$  a la propriété que son vecteur tangent  $t(s)$  définit un angle fixe  $\theta$  avec la courbe  $\gamma(s)$  pour tout  $s$

$$\gamma(s) = r(s) \cos \theta t + r(s) \sin \theta n_s$$

Montrer que:

- (a) si  $\theta = 0$  alors  $\gamma$  est un morceau de droite
  - (b) si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  alors  $\gamma$  est un cercle
  - (c) si  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  alors  $\gamma$  est un spiral
- 

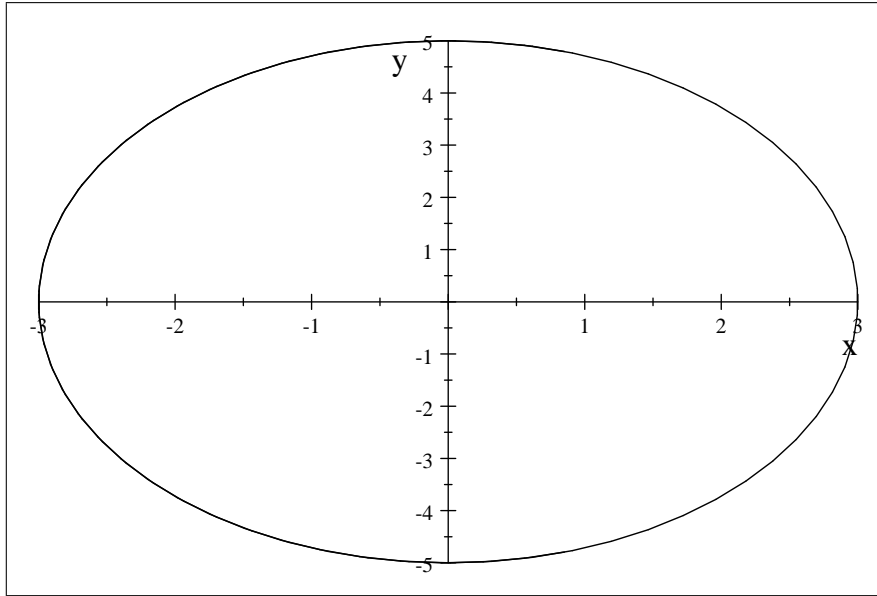
14. A- Soit  $\gamma$  une courbe plane dont la courbure n'est jamais nulle. On définit le centre de courbure  $\varepsilon(t)$  de  $\gamma$  au point  $\gamma(t_0)$  par

$$\varepsilon(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} n$$

Montrer que le cercle de centre  $\varepsilon(t)$  et de rayon  $\frac{1}{k}$  est le cercle osculateur de  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$

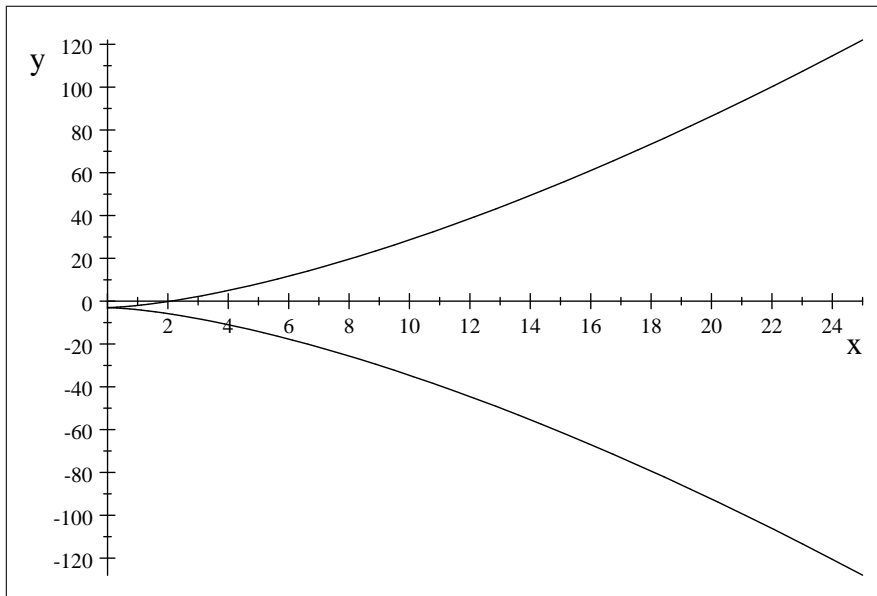
Application: trouver le cercle osculateur de :

(a)  $\gamma(t) = (3 \cos t, 5 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$



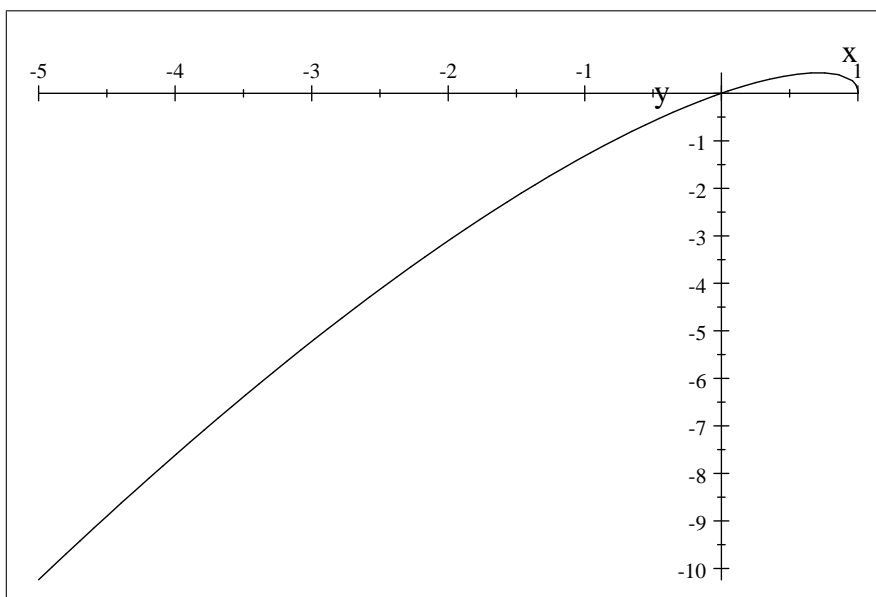
en  $t = \frac{\pi}{4}$

(b)  $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3), \quad -4 \leq t \leq 4$



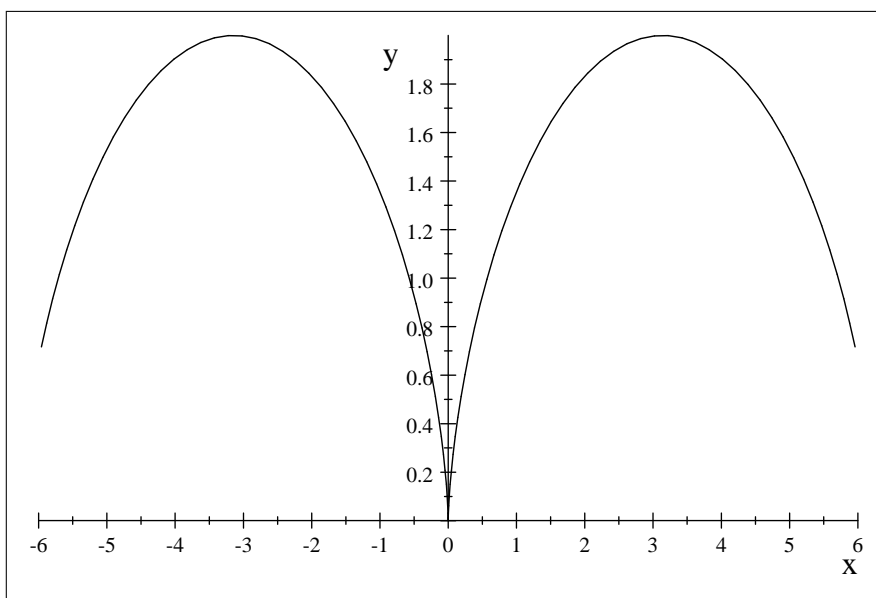
en  $t = \frac{3}{5}$

(c)  $y = x(1-x)^{\frac{2}{5}}, \quad -1 \leq x \leq 2, \text{ en } x_0 = \frac{1}{2}$   
 $x(1-x)^{\frac{2}{5}}$



B- On va regarder  $\varepsilon(t)$  comme une paramétrisation d'une nouvelle courbe dite l'évolution de  $\gamma$

- (a) Montrer que si  $k'_s > 0, \forall s$  alors la longueur de l'arc  $\varepsilon$  est  $u_0 - \frac{1}{k'_s}$  où  $u_0$  est constante. Calculer la courbure orientée de  $\varepsilon$
- (b) Soit  $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $0 < t < 2\pi$ ,  $a > 0$ .



Montrer que l'évolution du cycloïde  $\gamma$  est  $\varepsilon(t) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$