1. Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Vérifier que deux vecteurs u, v de E sont orthogonaux si et seulement si $||u+v|| = ||u-v||$

---

2. Vérifier que les objets mathématiques suivants définissent de produits scalaires:
   (a) Sur IR^3 : $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$
   (b) Sur $M_2(IR)$: $< A, B >= tr({}^tA.B)$
   (c) Sur $IR[x]$: $< P, Q >= \int_0^1 Px)Q(x)dx$

   (a) Soit $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe une unique application bilinéaire, alternée $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que:
   $$f(e_1, e_2) = e_3,\ f(e_2, e_3) = e_1,\ f(e_3, e_1) = e_2$$
   (b) Calculer $f(x, y)$ en fonctioin des composantes de x et y dans la base canonique. ($f(x, y)$ est dite le produit vectoriel de x par y et est noté par $x \wedge y$)
   (c) Montrer que
   $$< x \wedge y, z >= dét||x, y, z||_{e_i} \qquad \forall x,\ y < z \in \mathbb{R}^3$$
   (d) Montrer que
   $$||x \wedge y|| = A(x, y)$$
   où $A(x, y)$ est l'aire du parallélogramme défini par x et y :
   $$A(x, y) = ||x||\ ||y||\ |\sin\theta|$$
   En déduire que
   $$||x \wedge y||^2 = ||x||^2||y||^2 - < x, y >^2$$

---

3. Déterminer une base orthonormée du sous - espace vectoriel F de IR^4 engendré par les vecteurs:
   $$v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   (IR^4 étant muni du produit scalaire canonique)

---

4. (a) Montrer que tout endomorphisme sur un espace euclidien est bijectif
   (b) Vérifier que la matrice suivante
   $$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
   est orthonormale
   (c) Déduire que A est une rotation et trouver son axe de rotation ainsi que l'angle de rotation (non orienté) correspondant

(d) Déterminer l'angle de rotation orienté

---

5. (a) Comment peut-on définir l'angle entre deux plans de IR^3
   Exemple: Calculer l'angle entre les plans $\pi :\ 2x + y - 3z = 0$ et $\pi^{'} :\ x - 3y + 2z = 0$
   (b) Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de IR^3 la projection orthogonale sur le plan π d'équation: $x + 2y - 3z = 0$
   En déduire la matrice qui représente la symétrie orthogonale par rapport à π

---

6. Montrer que toute matrice $A \in O(2, IR)$ peut s'écrire sous la forme:

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & (-1)^{k+1}\sin\theta \\ sin\theta & (-1)^{k}\cos\theta \end{pmatrix}$$

En déduire la forme des éléments de $SO(2, IR)$.

---

7. (a) Montrer que l'application:

$$<,>: IR^3 \times IR^3 \longrightarrow IR$$

   définie par:$< x, y >= (\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3)(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - y_2 + y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 3x_3y_3$
   est un produit scalaire
   (b) Déterminer l'angle (non orienté) entre les vecteurs e_1 et e_2 de la base canonique de IR^3, IR^3 étant muni du produit scalaire défini dans la partie **a**

---

8. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui dans la base caractéristique de IR^3 est représenté par A.

---

9. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ ci - dessous définissent - elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

   (a) $f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
   (b) $f(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + \lambda x_3y_3 + 6x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$