1. Soit $f : IR^2 \longrightarrow IR^2$ l'endomorphisme qui, dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Trouver le spectre réel et le spectre complexe de f

---

2. Soit $f : IR^2 \longrightarrow IR^2$ l'endomorphisme qui, dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que f est diagonalisable
   (b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f
   (c) Trouver une matrice diagonale semblable à A
   (d) Déduire la matrice de passage P de la canonique $B = \{e_1, e_2\}$ à la base propre $B^{'} = \{v_1, v_2\}$
   (e) Soit $u = 2e_1 - 3e_2$. Trouver les composantes de u dans $B^{'}$.

---

3. Trouver les espaces propres associés à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

en déduire que A est diagonalisable.

---

4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montre que IR^3 peut s'écrire comme $E \oplus F$ où E et F sont deux espaces propres de A de dimensions respectives $\dim E = 2,\ \dim F = 1$.
   (b) En déduire que A est diagonalisable. Trouver la matrice de passage entre la base canonique et une base propre qu'on déterminera.

---

5. Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans C mais pas dans IR. Trouver alors la matrice diagonale complexe semblable à A.

---

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Trouver la matrice diagonale semblable à A en déduire $A^k,\ k \geq 1$.

   (b) On donne les suites numérique

   $$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

   Montrer que $X_n = A^n X_0$ où $X_n = \binom{u_n}{v_n}$. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n

---

7. Soit f l'application linéaire de IR^3 dans lui même représentée dans la base canonique par la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix} \qquad m \in IR$$

   (a) Déterminer m pour que f soit bijective

   (b) On pose $m = 4$

      1. Calculer A^{-1}
      2. Quel est l'antécédent du vecteur e_3 par f
      3. Calculer les valeurs propres de f
      4. Quelles valeurs faut-il donner à α et β pour que la famille $B = \{a, b, c\}$,où $a = (1, 1, 1),\ b = (1, \alpha, -2),\ c = (1, \beta, 0)$ soit une base formée de vecteurs propres de f?
      5. Vvrifier que A est diagonalisable et trouver la matrice diagonale qui lui est semblable
      6. Calculer A^n où $n \in IN^*$.

---

8. Soit le système différentiel suivant

   $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & x - y \\ \frac{dy}{dt} = & 2x + 4y \end{cases}$$

   Diagonaliser la matrice du système et en déduire sa solution.

   (a) Soient $\lambda_1 \cdots \lambda_p$ des scalaires deux à deux différents. Montrer que les espaces propres associés sont en somme directe

   (b) Déduire qu'un endomorphisme est diagonalisable ssi E est somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres de f

   (c) Montre que si λ est une valeur propre de f de dmultiplicité α alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$

   (d) Montrer que f est diagonalisable ssi :

      1. $P_f(X)$ est scindé
      2. Pour toute valeur propre λ_i de multiplicité α_i on a $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$
