1. (a) Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de IR^3 la projection f sur le plan π d'équation $x+2y+3z=0$ parallèlement à la droite D d'équation $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=z$

   (b) Ecrire la matrice A' de f dans la base $\{v_1,\ v_{2,}\, v_3\}$ où $\{v_{1,}v_2\}$ est une base de π et v_3 est une base de D. En déduire la matrice de f trouvée dans la partie **a**.

---

2. Dans IR^n On appelle longueur du vecteur $v=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ le scalaire

$$||v||=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

Montrer que les rotations de centre O dans le plan IR^2 conservent la longueur des vecteurs, la rotation étant définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{-}\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

---

3. Soit A une matrice carrée d'ordre n On appelle trace de A

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn}$$

   (a) Montrer que l'application

$$tr: M_n(IR)\longrightarrow IR$$

   est une forme linéaire

   (b) Montrer que $tr(AB)=tr(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace

   (c) Montrer que l'on ne peut pas trouver de matrices $A,\ B$ dans $M_n(C)$ telles que

$$AB-BA=I$$

---

4. Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f: & IR_2[x] & \longrightarrow & IR[x] \\ & P & \rightarrow & (ax+1)P+(bx^2+c)P' \end{array}$$

Quelles relations doivent vérifier a b et c pour que f soit un endomorphisme de $IR_2[x]$? Déterminer dans ce cas le rang de f

---

5. Soit l'homomorphisme d'e.v.

$$\begin{array}{llll} f: & IR^4 & \longrightarrow & IR^3 \\ & (x,y,z,t) & \rightarrow & (x-y+z+t,x+2z-t,x+y+3z-3t) \end{array}$$

Déterminer une base de $Ker\ f$ et une base de $\operatorname{Im} f$

---

6. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application associé à M définie par

$$\begin{array}{llll} f: & M_2(IR) & \longrightarrow & M_2(IR) \\ & A & \rightarrow & AM - MA \end{array}$$

   (a) Vérifier que f est un endomorphisme d'e.v.
   (b) Déterminer une base de $Ker\ f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$

---

7. Soit

$$\begin{array}{llll} \varphi: & IR_n[x] & \longrightarrow & IR^{n+1} \\ & P & \rightarrow & (P(0), P(1), \cdots, P(n)) \end{array}$$

   Montrer que φ est un isomorphisme d'e.v.

---

8. Soit E un e.v. On appelle projecteur un endomorphisme P de E telque $P^2 = P$. Montrer que si P est un projecteur alors $E = Ker\ f \oplus \mathrm{Im}\, f$

---

9. (a) Soit E l'espece vectoriel des applications contniues de $[0,1]$ dans IR. Montrer que l'application:

$$\begin{array}{llll} \psi: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \rightarrow & F \end{array}$$

   où $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est un endomorphisme de E.

   (b) Soit $f_0 \in E$ fixé. Montrer que l'application:

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ & \mathrm{f} & \rightarrow & \int_0^1 f_0(t)f(t)dt \end{array}$$

   est une forme linéaire sur E

   (c) Montrer que l'application:

$$\begin{array}{llll} \delta: & E & \longrightarrow & IR \\ & f & \rightarrow & f(0) \end{array}$$

   est une forme linéaire sur E (elle est appelée **fonctionnelle de Dirac**)

---

10. Soit f une application linéaire bijective de E dans F (c'est -à-dire un isomorphisme). Montrer que f^{-1} est une application linéaire

---

11. Soit $h \in IR$ et:

$$\begin{array}{llll} \varphi_h: & \mathrm{IR}_n[x] & \longrightarrow & \mathrm{IR}_n[x] \\ & \mathrm{P} & \rightarrow & \mathrm{Q} \end{array} \qquad \text{avec } Q(x) = P(x+h)$$

   Montrer que φ_h est un isomorphisme

---

12. Soit $f \in End(IR^3)$ tel que $f^2 = 0$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset Ker\ f$
   (b) En déduire qu'il existe $v \in IR^3$ et $g \in L(IR^3, IR)$ tels que, pour tout $x \in IR^3$, $f(x) = g(x).v$
   (Ind. Utiliser le théorème de la dimension pour montrer que $rg\ f \leq 1$)

13. Soit f l'endomorphisme de IR^3 qui dans la base canonique est représentée par la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\ker f$, une base de $\operatorname{Im} f$ et l'équation de $\operatorname{Im} f$

---

14. (a) Existe-t-il des applications linéaires $f : IR^4 \longrightarrow IR^3$ telles que $\ker f$ soit engendré par le vecteur $v = (1, 1, 0, -1)$ et $\operatorname{Im} f$ soit le plan d'équation $x + y - z = 0$?

    (b) Déterminer la forme générale des matrices qui représentent dans les bases canoniques de IR^4 et de IR^3 les applications linéaires $f : IR^4 \longrightarrow IR^3$ pour lesquelles $\ker f = [v_1, v_2]$ avec $v_1 = (1, 1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$ et $\operatorname{Im} f$ soit le plan π d'équation $x + y - z = 0$
