

1. On se met dans l'e.v. IR^3 muni des lois habituelles. Soit:

$$F = \{(x, y, z) \in IR^3 \mid \begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & & = & 0 \end{cases}\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in IR^3 \mid (x - y)^2 = 2x + y\}$$

- (a) Vérifier que F est un s.e.v de IR^3 alors que G ne l'est pas
 (b) Trouver une base de F et en déduire sa dimension
 (c) Quelle est l'interprétation géométrique de F

2. On se met dans $M_2(IR)$ muni des lois habituelles. On considère les sous ensembles:

$$E = \{A \in M_2(IR) \mid A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}\}$$

$$F = \{A \in M_2(IR) \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\}$$

- (a) Vérifier que F est un s.e.v de IR^3 alors que G ne l'est pas
 (b) Trouver une base de F et en déduire sa dimension

3. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ où $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1, 1)$ engendrent IR^2 . Est-elle une base?

4. La famille $\{v_1, v_2, v_3\} \subset IR^3$ où $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, -1, 5)$ est-elle libre? Est-elle génératrice? Quelle relation linéaire lie ces vecteurs? Quel est l'espace qu'ils engendrent?

5. (a) Le corps IK désigne IR ou C . Montrer que $E = \{A \in M_n(IK) \mid tr(A) = 0\}$ est un s.e.v. de $M_n(IK)$. En donner une base pour $n = 2$
 (b) Montrer que $F = \{P \in IR_2[x] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)x + \mu x^2 \quad (\lambda, \mu \in IR)\}$ est un s.e.v. de $IR_2[x]$. En donner une base

6. On se place dans le IR -espace vectoriel $IR_2[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 . Soit

$$E = \{P \in IR_2[x] \mid P(-1) = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{P \in IR_2[x] \mid P(1-x) = P(x)\}$$

- (a) Montrer que E et F sont deux s.e.v de $IR_2[x]$. En donner une base de chacun d'eux et déduire leurs dimensions
 (b) E et F sont-ils supplémentaires dans $IR_2[x]$?

7. On se place dans $M_2(IR)$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = I_2$. On définit l'ensemble

$$E = \{M \in M_2(IR) \mid AM = MA\}$$

- (a) Montrer que E est un s.e.v. de $M_2(IR)$

- (b) Montrer que $\{A, I\}$ est un système de générateurs de E , en déduire la dimension de E
(c) Résoudre dans E l'équation: $X - A^2X + AXA - A = 0$.
-

8. Soient E et F deux \mathbb{k} -espaces vectoriels, et soit $V = E \times F$. On pose

$$U = \{(x, 0), x \in E\} \quad \text{et} \quad W = \{(0, x), x \in F\}$$

Montrer que U et W sont deux sous-espaces vectoriels de V , et que $V = U \oplus W$

9. Soit

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); b + c + d = 0 \right\} \quad \text{et} \\ V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a + b = 0 \text{ et } c = 2d \right\}$$

- (a) Montrer que U et V sont deux sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$
(b) Trouver une base de U, V , et $U \cap V$ et en déduire leur dimension respective
(c) On pose $W = U + V$. Trouver une base de W . A-t-on $W = U \oplus V$? Pourquoi?
-

10. On donne les éléments suivants de \mathbb{R}_4 :

$$x_1 = (1; 1; 0; -1), \quad x_2 = (1; 2; 3; 0), \quad x_3 = (2; 3; 3; -1), \\ x_4 = (1; 2; 2; -2), \quad x_5 = (2; 3; 2; -3), \quad x_6 = (1; 3; 4; -3)$$

Trouver les dimensions de $U + V$ et de $U \cap V$ dans les cas suivants:

- (a) $U = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ et $V = \langle x_4, x_5, x_6 \rangle$
(b) $U = \langle x_1, x_2 \rangle$ et $V = \langle x_1, x_3, x_4 \rangle$