

1. (a) Trouver x, y, z et t dans \mathbb{R} tels que

$$\begin{pmatrix} 3x+y & x-3y \\ 4z-2t & z+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA
2. Peut-on trouver une matrice réelle X telle que $AX = B$?
3. Peut-on trouver une matrice réelle Y telle que $YA = B$?

2. Soient les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer si possible:

- (a) $(A + E).F$ $C.E$ et $E.C$
- (b) $(2D).A.B$ ${}^t F.D - {}^t A$
- (c) $3B^2 + {}^t A.F$ $C.B + {}^t E.{}^t A.F$

3. (a) Trouver deux matrices réelles A et B telles $A \neq 0, B \neq 0$ et $AB = 0$
- (b) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :
1. $\frac{1}{2}(A + {}^t A)$ est symétrique
 2. $\frac{1}{2}(A - {}^t A)$ est antisymétrique
- (c) En déduire que $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice symétrique B et une matrice antisymétrique C telles que $A = B + C$.
- (d) Soit A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver B et C

4. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que $J^2 - J - 2I_3 = (0)$
(b) Déduire J^{-1}
(c) Retrouver J^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan
-

5. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que $(M - I)(M + 3I) = (0)$
(b) Montrer que M est inversible et trouver M^{-1}
(c) Trouver M^2 en fonction de M et de I
(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = a_n M + b_n I$. En déduire M^3
-

6. Calculer

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

7. Calculer l'inverse de la matrice suivante par la méthode de Gauss Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Retrouver l'inverse de A par la méthode de Cramer et puis en utilisant le théorème de Hamilton Caley