1. Soit
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 9 & -3 \\ 9 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que : $A^2 - AB - 2I = 0$
   (b) Déduire que A est inversible et trouver son inverse
   (c) Donner l'inverse de A par la méthode de Gauss-Jordan
   (d) Retrouver l'inverse de A par la méthode des cofacteurs

---

2. Soit la matrice
$$A = .\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer A^2 et A^3
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, A^n est une matrice de la forme
$$A^n = .\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & (3x-y+z, x+y+z, x-y+3z) \end{array}$$
   (a) Donner la matrice de f , $A = M(f)$,dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
   (b) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
   (c) f est-elle injective? surjective?
   (d) Calculer $|A|$ et retrouver le résultat de la question précédente.
   (e) Donner $f^{-1}(x;y;z)$, l'image réciproque de $(x;y;z)$ par f.
   (f) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f
   (g) Déduire que A est diagonalisable et donner la matrice diagonale $A^{'}$ semblable à $A = M(f)$
   (h) Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base propre de f
   (i) Soit $u = e_1 + 2e_2 - e_3$. Donner les composantes du vecteur u dans la base formée des vecteurs propres.
   (j) Déduire A^n, $\quad n \in \mathbb{N}$.

---

4. On considèle le système linéaire et réel suivantDiscuter :
$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array} \right.$$
   a et b etant deux paramétres réels

(a) Pour quelles valeurs de a et b le système (S) est - il un système de Cramer. Trouver dans ce cas, sa solution

(b) Dans le cas où (S) n'est pas de Cramer, discuter et résoudre, selon les valeurs de a et b le système (S)

---

5. On considère dans $M_2(\mathbb{R})$, muni des lois $+$ et $\cdot$, le sous-ensemble U suivant:

$$U = \left\{ A \in M_2(IR) \, / \, A = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Montrer que U est un s.e.v de $M_2(\mathbb{R})$, puis en donner une base et la dimension

(b) On considère le s.e.v V, engendré par

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\{M_1, M_2\}$ est une base de V

(c) Donner une base et la dimension du s.e.v $U + V$.

(d) Les espaces U et V sont-ils suplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$?. Justifier

---

6. Vérifier sans faire de calcul et seulement en utilisant les propriétés sur les déterminants que l'on a :

$$\begin{vmatrix} a & ab & a^2 \\ b & bc & b^2 \\ c & ca & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab & b^2 \\ c & bc & c^2 \\ a & ca & a^2 \end{vmatrix} = 0$$
