1. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \rightarrow & (3x-2y, 7x-6y) \end{array}$$

   (a) Vérifier que f est linéaire et donner A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
   (b) Donner le polynôme caractéristique de A et déduire le spectre réel de f c.à.d l'ensemble des valeurs propres réelles.
   (c) Trouver une base de chacun des espaces propres correspondants
   (d) Déduire que A est diagonalisable et trouver une matrice diagonale A' semblable à A
   (e) Trouver une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$
   (f) Soit B une base propre associée à f et soit $x = e_1 + 2e_2$ où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les composantes de x dans la base B
   (g) Soit (u_n) une suite numérique définie par:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad u_1 = 5, \;\; u_2 = 3$$

   Calculer A^n et déduire une expression de u_n en fonction de n

---

2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \;\; / \;\; P(x) = a + (2a-3b)x + bx^2 + (b-a)x^3\}$ où $\mathbb{R}_3[x]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

   (a) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ dont on précisera une base et la dimension
   (b) Soit F le plan vectoriel engendré par les polynômes P_1 et P_2 définis par:

$$\begin{cases} P_1(x) = 1 + 2x \\ P_2(x) = 1 - x + x^2 \end{cases}$$

   Déterminer une base et la dimension de $E + F$, $\;E \cap F$
   (c) Trouver un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_2[x]$

---

3. Soit M l'ensemble $M_2(IR)$ des matrices carrées réelles.M est un $IR - e.v.$ de dimension 4. On définit l'ensemble A des matrices carrées réelles de la forme

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que A est un $s.e.v.$ de M. Trouver une base de A et déduire sa dimension
   (b) Calculer $\det(A(a,b)) = |A(a,b)|$ Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que $A(a,b)$ soit inversible?Dans ce cas trouver $A^{-1}(a,b)$. La matrice $A^{-1}(a,b)$ est-elle dans A?
   (c) Trouver $A^2(0,b)$ et $A^3(0,b)$. En déduire une expression de $A^n(a,b)$ $\;n \in IN^*$. Pour quelle valeur de b la matrice $A^n(0,b)$ est - elle inversible?

---

4. A- Soit $f : IR^3 \longrightarrow IR^3$ une application linéaire qui est représentée dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de IR^3 par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Trouver par deux manières l'expression de $f(x, y, z)$ image par f d'un vecteur (x, y, z) de IR^3

   (b) Trouver $\mathrm{Im}\, f$ et $K\mathrm{erf}$ en déterminant une base pour chaqu'un d'eux. L'application f est - elle injective, surjective ou bijective?

   B- Soit $B^{'} = \{e_1^{'} = (1, 1, 0), e_2^{'} = (0, 1, 1), e_3^{'} = (1, 0, 1)\}$ une base de IR^3

   (a) Donner la matrice de passage de B à $B^{'}$

   (b) Donner par deux méthodes, $M(f, B^{'})$ la représentation matricielle de f dans la base $B^{'}$

---

5. Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{llll} f: & IR^3 & \longrightarrow & IR^3 \\ & (x, y, z) & \rightarrow & (-x + y + z, x - y + z, x + y - z) \end{array}$$

   (a) Donner la matrice de f dans la base canonique de IR^3

   (b) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f et préciser la dimension des espaces propres correspondants

   (c) L'application f est - elle diagonalisable? Si oui, donner la matrice diagonale $A^{'}$semblable à A

   (d) En déduire la matrice de passage de la base canonique de IR^3 à la base propre $B^{'}$ formée de vecteurs propres

   (e) Sachant qu'une application linéaire α est injective si et seulement si $\ker \alpha = \{0\}$. Vérifier que α n'est pas injective si et seulement si $\lambda = 0$ est une valeur propre de α. Dans ces conditions, f est - elle injective?

   (f) Calculer A^n pour tout $n \in IN^*$

   (g) On se donne un système linéaire récurcif des suites numériques

$$\left\{ \begin{array}{r} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{array} \right. \qquad (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1/2)$$

   Exprimer ce système sous forme matricielle et déduire de f) une expression de u_n, v_net w_n en fonction de n

---

6. $IR_3[x]$ désigne l'ensemble des polynômes à coèfficients réels, de dégré inferieur ou égal à 3. On rappelle que $IR_3[x]$ muni de la loi interne usuelle + et de la multiplication externe . est un $IR{-}e.v.$ de dimension 4.une base de $IR_3[x]$ est $\{1, x, x^2, x^3\}$.

   Soit

$$\begin{array}{lll} E & = & \{f \in IR_3[x] \ / \ f(1) = 0\} \\ F & = & \{f \in IR_3[x] \ / \ f(-x) = f(x) \text{ et } f(0) = 0\} \end{array}$$

   (a) Vérifier que E et F sont deux s.e.v. de $IR_3[x]$

   (b) Trouver une base de E et une base de F. En déduire la dimension de chacun d'eux

(c) E et F sont-ils supplémentaires?Justifier!

---

7. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} IR^2 & \longrightarrow & IR^2 \\ (x,y) & \to & (x+y, x-y) \end{array}$$

(a) Trouver $M(f,B)$, la matrice associée à f dans la base canonique B de IR^2, où

$$B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}.$$

(b) Soit $B^{'} = \{e_1^{'} = (1,1), e_2^{'} = (-1,1)\}$ une base de IR^2

1. Trouver la matrice de passage P de B à $B^{'}$
2. Déduire de 1) $M(f,B^{'})$ la matrice associée à f dans la base $B^{'}$ et puis retrouver $M(f,B^{'})$ par une autre méthode.

---

8. On donne $f : IR^3 \longrightarrow IR^3$ telle que

$$\begin{cases} f(e_1) = & 2e_1 - e_2 \\ f(e_2) = & e_1 - e_2 + 3e_3 \\ f(e_3) = & e_3 \end{cases}$$

où $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est la base canonique de IR^3

(a) Trouver par deux méthodes $f(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in IR^3$, dont l'une fait usage de $M(f,B)$

(b) Trouver $\ker f$ et dire si f est injective

---

9. A votre avis, deux plans parallèls de IR^3 peuvent être tous les deux de s.e.v. de IR^3?
