وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	الدورة العادية للعام 2011
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

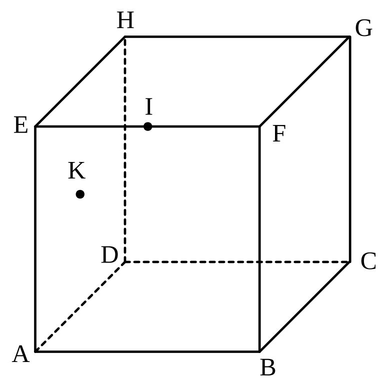
I-(2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

		Réponses		
N°	**Questions**	**a**	**b**	**c**
1	$\int_{-a}^{a}\left(x^5-\sin x\right)dx=$	$\frac{a^6}{6}$	$\frac{a^6}{24}$	0
2	$\arg\left(\frac{e^{i\pi}}{i}\right)=$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
3	Les racines de l'équation $z+\lvert z\rvert^2=3+i$ sont :	$1+i$ et i	$1+i$ et $-2+i$	$-2+i$ et $-i$
4	Si $u=z-2\bar{z}+i$, alors $i\bar{u}=$	$i\bar{z}+2iz+1$	$i\bar{z}-2iz+1$	$i\bar{z}-2iz-1$
5	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+e^{-x}\right)=$	$+\infty$	0	$-\infty$
6	Si $\alpha=\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$, alors $\alpha=$	$\frac{7\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5}$

II-(2 points)

On considère un cube ABCDEFGH.



L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par K le centre du carré ADHE.

1) a-Calculer l'aire du triangle IGA.

b-Calculer le volume du tétraèdre ABIG.

c-Déduire que la distance du point B au plan (AIG) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2) a- Ecrire une équation du plan (AFH).

b- La droite (CE) coupe le plan (AFH) en un point L. Calculer les coordonnées de L.

c- Montrer que L est un point de la droite (FK). Que représente le point L pour le triangle AFH ?

III-(3 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

U_1 contient quatre boules rouges et trois boules vertes.

U_2 contient deux boules rouges et une boule verte.

A-

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges de l'urne U_2 après les deux tirages précédents.

1) Démontrer que la probabilité $P(X = 2)$ est égale à $\frac{9}{14}$.

2) Donner les trois valeurs de X et déterminer la loi de probabilité de X.

B-

Dans cette partie les boules rouges portent chacune le nombre 1 et les boules vertes portent chacune le nombre – 1.

On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne choisie.

On considère les événements suivants :

E : « L'urne choisie est l'urne U_1 »

F : « La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 0 ».

1) a- Calculer les probabilités $P(F/E)$ et $P(F/\overline{E})$.

b- Déduire que $P(F) = \frac{13}{21}$.

2) On désigne par G l'événement « La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à –2». Calculer P (G).

IV-(3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite (d) d'équation $x = -4$ et la parabole (P) de foyer O et de directrice (d).

1) a- Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 8x + 16$. Déterminer le sommet S de (P).

b- Tracer (P).

c- Soit D le domaine limité par (P) et l'axe des ordonnées. Calculer l'aire de D.

d- Calculer le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

2) Soit A (6 ; 8) un point de (P).

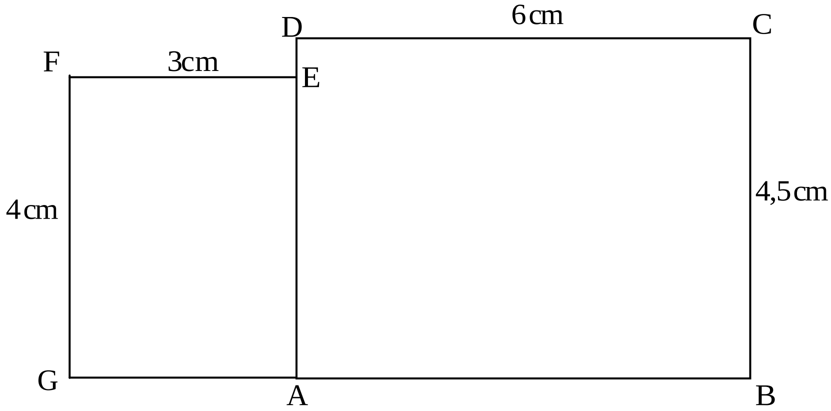
a- Ecrire une équation de la tangente (T_A) en A à (P).

b- La droite (OA) recoupe (P) au point B.
Calculer les coordonnées de B et écrire une équation de la tangente (T_B) en B à (P).

c- Vérifier que (T_A) et (T_B) sont perpendiculaires et qu'elles se coupent sur la directrice de (P).

3) Soit $M(x_o ; y_o)$ un point de (P) distinct de S.
N est le projeté orthogonal de M sur la tangente en S à (P).
La perpendiculaire menée de N à la droite (MS) coupe l'axe des abscisses en I.
Montrer que l'abscisse de I est indépendante de x_o et y_o.

V-(3 points)



Dans la figure ci-dessus, ABCD et AEFG sont deux rectangles directs où $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π).

S est la similitude plane directe qui transforme B en E et C en F ;

T est la translation de vecteur $\vec{EF}$;

f est la similitude définie par T o S.

1) a-Déterminer le rapport k et un angle α de S.

b-Déterminer l'image par S de D.

c-Démontrer que A est le centre de S.

2) a- Déterminer f(B) et f(A).

b- Préciser le rapport et un angle de la similitude f.

c- Construire le centre W de f.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(A ; \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE})$.

a- Ecrire la forme complexe de f.

b- En déduire l'affixe du point W.

4) Soit F_1 l'image de F par S et pour tout entier naturel n non nul on désigne par F_{n+1} l'image de F_n par S.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points A, F_1 et F_n sont alignés.

VI- (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;5[$ par f(x) = ln (5 – x).

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b- Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty\,;5[$.

2) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 4.

b- Tracer (T) et (C).

c- (C) coupe la droite d'équation y = x en un point d'abscisse α. Vérifier que $1< \alpha < 2$.

3) f admet une fonction réciproque f^{-1}. On désigne par (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C).

a- Montrer que la tangente (T) à (C) est aussi tangente à (C').

b-Tracer (C').

4) Soit h la fonction définie sur $]-\infty\,;5[$ par h(x) = (5 – x) ln(5 – x).

a- Vérifier que $h'(x)+f(x)=-1$ et déduire une primitive de la fonction f.

b- On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et x = 4. Prouver que $A(\alpha)=-\alpha^2+6\alpha-4$.

5) Soit l'intervalle $I=[0\,;3]$.

a- Montrer que $f(I)$ est inclus dans I.

b- Montrer que, pour tout x de I, on a $|f'(x)|\le \dfrac{1}{2}$.

c- En déduire que, pour tout x de I, $|f(x)-\alpha|\le \dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

6) On considère la suite (U_n) définie par $U_o = 1$ et, pour tout $n \ge 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a- Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n\ge 0$, U_n appartient à I.

b- Etablir que, pour tout $n \ge 0$, $|U_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c- Démontrer que, pour tout $n\ge 0$, $|U_n - \alpha| \le \dfrac{1}{2^n}$ et déduire que la suite (U_n) est convergente.