وزارة التربية والتعليم العالي **المديرية العامة للتربية** **دائرة الامتحانات**	**امتحانات الشهادة الثانوية العامة** **الفرع : علوم عامة**	**الدورة الإستثنائية للعام 2010**
عدد المسائل : ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	**الاسم:** **الرقم:**

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)0

I-(2 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux droites (D) et (D') définies par leurs équations paramétriques :

$$(D):\begin{cases}x=m+1\\ y=m\\ z=-m+2\end{cases} \quad \text{et } (D'):\begin{cases}x=t-1\\ y=t\\ z=2t+3\end{cases} \quad \text{(t et m sont deux paramètres réels)}$$

1) Démontrer que (D) et (D') sont orthogonales et non coplanaires.

2) Soit $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ deux vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D') et $\vec{V}=\vec{U}\wedge\vec{U'}$.

(P) est le plan contenant (D) et parallèle à $\vec{V}$.

a- Ecrire une équation de (P).

b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection H' de (D') et (P).

c- Soit H (0 ; – 1 ;3) un point de (D). Prouver que (HH') est perpendiculaire à (D) et à (D').

3) Soit A(1;0;2) un point de (D) et M un point variable de (D'). Déterminer les points M de (D') pour que le volume du tétraèdre AHH'M soit égal à 2.

II-(2 points)

On considère la suite $\left(U_n\right)$ définie pour tout entier $n\geq 1$, par $U_n=\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1) En utilisant une intégration par parties, démontrer que $U_{n+1}=\frac{1}{3}\left(e^3-(n+1)U_n\right)$.

2) Montrer que tous les termes de la suite $\left(U_n\right)$ sont positifs et prouver que $U_n\leq\frac{e^3}{n+1}$.

3) a- Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,e]$, on a : $(\ln x)^{n+1}\leq(\ln x)^n$.

b- Prouver que $U_{n+1}\leq U_n$ et que $U_n\geq\frac{e^3}{n+4}$.

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}nU_n$.

III- (3 points)

Une urne contient 5 boules noires, 4 boules blanches et 1 boule verte.
On tire, au hasard et simultanément, 5 boules de cette urne.

1) Combien y a- t- il de tirages possibles?

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E : « parmi les cinq boules tirées il n'y a aucune boule noire»
   F : « parmi les cinq boules tirées il y a au moins une boule noire »
   G : « parmi les cinq boules tirées il y a exactement une boule noire et une boule verte »

3) Calculer la probabilité de l'événement suivant :

   H : « les boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur et il y a autant de boules blanches que de boules vertes ».

4) On considère les événements suivants :

   A : « parmi les 5 boules tirées il y a exactement 4 boules de même couleur »

   B : « la boule verte est parmi les 5 boules tirées »

   Vérifier que $P(A) = \dfrac{31}{252}$ et calculer $P(B/A)$.

IV- (3 points)

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la parabole (P) de foyer F (2 ; 0) et de directrice la droite (Δ) d'équation $x = -2$.

1) Ecrire une équation de (P) et tracer (P).

2) Le cercle (C) de centre F et de rayon 3 coupe (P) en deux points A et B.
   a- Prouver que $x_A = x_B = 1$.
   b- On désigne par D le domaine limité par la parabole (P) et la droite (AB).
      Calculer le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

3) Soit m un réel donné non nul et T le point de (P) d'ordonnée m.
   a- Montrer qu'une équation de la tangente à (P) en T est $y = \dfrac{4}{m}x + \dfrac{m}{2}$.
   b- T ' est un point de (P) distinct de T d'ordonnée m' $(m' \neq 0)$.
      Les tangentes à (P) en T et T ' se coupent en un point I.
      Calculer l'abscisse de I en fonction de m et m'.

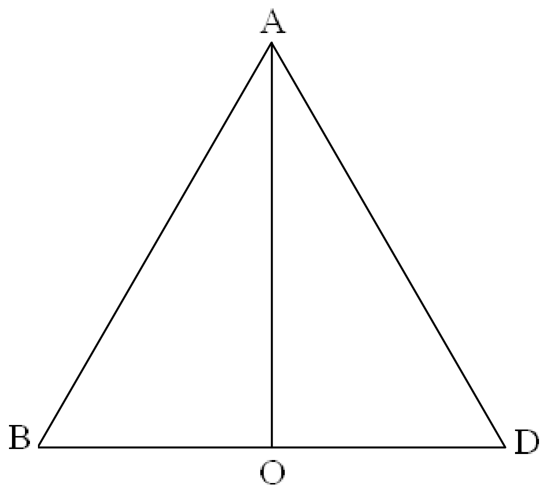
4) Dans cette question on suppose que les tangentes à (P) en T et T' sont perpendiculaires.

a- Démontrer que le point I appartient à (Δ).

b- Démontrer que les trois points T, T ' et F sont alignés.

V- (3 points)

Dans la figure ci-dessous, ABD est un triangle équilatéral de côté 2 tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et O est le milieu de $[BD]$.



Soit S la similitude directe qui transforme O en D et D en A.

1) Déterminer l'image du point B par S .

2) Déterminer le rapport et un angle de S.

3) a- Soit A' l'image du point A par S . Déterminer la nature du triangle DAA' et déduire que le point A' est le symétrique de A par rapport à B.

b- Soit G le centre de gravité du triangle AOD et G' son image par S.

Montrer que $\overrightarrow{G'B}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$.

4) On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OD}$.

Soit L le symétrique de B par rapport à D et h l'homothétie de centre L et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a- Déterminer la forme complexe de S et déduire l'affixe de son centre W.

b- Déterminer la forme complexe de h.

c- Déterminer la forme complexe de $S\circ h$ et vérifier que c'est une rotation dont on déterminera un angle.

VI- (7 points)

A- On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=2xe^{-x}$.

On pose $z=ye^{x}$.

1) Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z.

2) a- Résoudre (E') et déduire la solution générale de (E) .

b- Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0)=0$.

B - Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.\`

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Déterminer le point de (C), autre que O, tel que la tangente à (C) en ce point passe par O.

4) a- Montrer que (C) admet deux points d'inflexion.

b- Tracer (C).

5) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{-x}$ et (C') sa courbe représentative dans le même repère que (C).

a- Etudier la position relative des courbes (C) et (C').

b- Tracer (C').

6) Soit h la fonction définie sur IR par $h(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

a- Calculer $h'(x)$. En déduire une primitive de f .

b- Calculer, en cm^2, l'aire S du domaine limité par (C), (C') et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

c- Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C), (C') et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$ $(\alpha>1)$.

Calculer, en cm^2, $A(\alpha)$ et montrer que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)=S$.

7) Soit m un réel supérieur à e. La droite d'équation $y=m$ coupe la courbe (C) en un point P et la courbe (C') en un point Q. Calculer l'abscisse du point P tel que $PQ=1$.