وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع : العلوم العامة	دورة العام 2010 العادية
عدد المسائل : ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I - (2points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

N°	questions	a	b	c	d
1	$(1+i\sqrt{3})^{-6}=$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}i$	$-64i$
2	La négation de la proposition $p\wedge(\neg q)$ est :	$(\neg p)\wedge q$	$(\neg p)\vee q$	$(\neg p)\vee(\neg q)$	$(\neg p)\wedge(\neg q)$
3	Si $\frac{\pi}{2}\leq x<\pi$ et $F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$, alors $F'(x)=$	$\cos x$	$\frac{1}{2}\sin 2x$	$-\cos^2 x$	$\cos^2 x$
4	$\int_{-1}^{1}\lvert x\rvert(x^2-1)dx=$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
5	On donne dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ le point B(1; 2). Les coordonnées de M tels que le triangle OBM est rectangle en O et $(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM})=-\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ sont :	$\left(-2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$	$(-4\ ;\ 2)$	$(4\ ;\ -2)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

II- (2 points)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation $x - 2y + z - 2 = 0$ et les droites (D) et (D') définies par :

$$(D) : \begin{cases} x = m \\ y = -2m + 1 \\ z = m - 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad \text{(m et t sont des paramètres réels).}$$

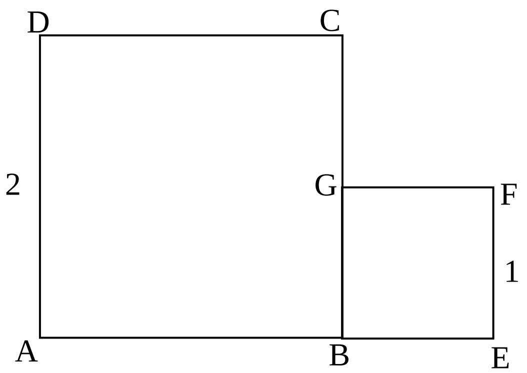
1) Démontrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

2) a- Prouver que (D) est perpendiculaire à (P).
   b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (D) et (P).

3) a- Prouver que (D') est contenue dans (P).
   b- Le cercle (C) de centre I et de rayon $\sqrt{5}$ contenu dans le plan (P), coupe la droite (D') en deux points A et B. Calculer les coordonnées de A et B.
   c- Soit J le milieu de [AB]. Prouver que (I J) est perpendiculaire à (D) et (D').

III - (3 points)

Dans un plan orienté on donne deux carrés directs ABCD et BEFG de côtés respectifs 2 et 1.



Soit S la similitude plane directe, de rapport k et d'angle α, qui transforme E en A et G en C.

A- 1) Vérifier que $k = 2$ et $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

2) Démontrer que l'image du point F par S est B puis déduire S(B).

3) Construire le centre W de S.

B- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(B ; \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG})$.

1) Déterminer les affixes des points A et E.
2) Donner l'écriture complexe de S.
3) Déterminer la forme algébrique de l'affixe de W.
4) Montrer que les points C, W et E sont alignés.

C- Soit R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Démontrer que RoS est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

IV - (3 points)

L'équipe d'une grande usine est répartie en trois catégories:

les ingénieurs, les techniciens et les ouvriers.

●6% de l'équipe sont des ingénieurs.

●74% de l'équipe sont des ouvriers.

●80% des ouvriers sont des hommes.

●10% des ingénieurs sont des femmes.

On interroge au hasard une personne de l'équipe de cette usine.

Soit les événements :

I : « La personne interrogée est de la catégorie des ingénieurs».

O: «La personne interrogée est de la catégorie des ouvriers».

T: « La personne interrogée est de la catégorie des techniciens».

H: «La personne interrogée est un homme».

1)a-Quelle est la probabilité d'interroger un homme ouvrier?

b- Quelle est la probabilité d'interroger un homme ingénieur?

2) On sait que 80% de l'équipe sont des hommes.

a- Démontrer que la probabilité d'interroger un homme technicien est 0,154.

b- La personne interrogée est une femme, quelle est la probabilité qu'elle soit une technicienne?

3) Dans cette question, on suppose que l'équipe de cette usine compte 500 personnes.

On choisit au hasard et simultanément trois personnes de cette équipe.

a- Calculer la probabilité de choisir trois personnes de trois catégories différentes.

b- Calculer la probabilité de choisir au plus une personne de la catégorie des ingénieurs.

V – (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$.

Soient (D), (D') et (Δ) les droites d'équations respectives $x = 2$, $x = -2$ et $y = -1$.

On désigne par d, d' et δ les distances d'un point quelconque M(x ; y) à (D), (D') et (Δ) respectivement.

Soit (E) l'ensemble des points M tels que $-2 \le x \le 2$ et $d \times d' = 4\delta^2$.

1) Vérifier que les points O et $A(2\,;\,-1)$ appartiennent à (E).

2) a- Calculer d, d' et δ en fonction de x et y.

b- Montrer que (E) est l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$.

c- Tracer (E).

3) a- Calculer l'excentricité de (E).

b- Déterminer les coordonnées des foyers F_1 et F_2 et les équations des directrices associées (d_1) et (d_2) .

4) Soit $M(x_0\,;\,y_0)$ un point variable de (E).

a- Calculer, en fonction de x_0, la distance de M à la directrice (d_1) . Déduire la distance MF_1 puis calculer MF_2 .

b- Déterminer les abscisses des points M de (E) tels que $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$.

VI - (7 points)

Soit f la fonction définie, sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation y = – x + 1 est une asymptote à la courbe (C).

c- Étudier la position relative de (C) et (d).

2) Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=2-\ln x-2x\sqrt{x}$.

a- Démontrer que g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

b- Vérifier que g(1) = 0 et déduire le signe de g(x).

3) a- Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

b- Dresser le tableau de variations de f.

4) a- Trouver les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à (d).

b- Tracer (d), (T) et (C).

5) Calculer l'aire du domaine limité par (C), la droite (d) et les deux droites d'équations x = 1 et x = e.

6) a- Montrer que f admet sur $[1;+\infty[$ une fonction réciproque h et donner le domaine de définition de h.

b- Soit (C_1) la courbe représentative de h, montrer que (T) est tangente à (C_1) au point d'ordonnée e^2 et tracer (C_1) dans le même repère.

7) On définit une suite (u_n) par son premier terme $u_o > 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+f(u_n)$.

a- Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n on a $u_n > 1$.
(on pourra utiliser la courbe (C))

b- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- Déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.