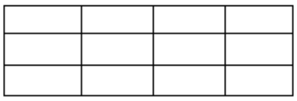
وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع: علوم عامة	دورة سنة 2008 الاكمالية الاستثنائية
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

إرشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	Soit $f(x)=\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ pour $x\in]-\infty\,;-1[$, on a :	$f(x)=\pi+2\arctan(x)$	$f(x)=-2\arctan(x)$	$f(x)=\pi-2\arctan(x)$
2	$f(x)=\ln(x)$ définie sur $]0;+\infty[$; la dérivée d’ordre n de f est donnée par :	$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\, n!}{x^n}$	$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$f^{(n)}(x)=\frac{1}{x^n}$
3	Le nombre de rectangles dans cette figure est : 	60	12	20
4	L’équation $e^{2x}+2x-1=0$, admet dans l’ensemble *IR* :	2 racines distinctes	aucune racine	une seule racine
5	Si $z=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}$ alors :	$\arg(z)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\arg(z)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\arg(z)=\frac{\pi}{6}$.

II- (2 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point A(2 ; –3 ; 5) et les plans (P) et (Q) d'équations:

$$(P): 2x - 2y - z + 4 = 0$$

$$(Q): 2x + y + 2z + 1 = 0$$

A-1) Démontrer que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2) Montrer que la droite (D) définie par $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \\ z = -2t - 2 \end{cases}$ (t est un paramètre réel),

est l'intersection de (P) et (Q).

3) Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur la droite (D).

B- On désigne par (R) le plan passant par le point W(1 ; 4 ; 1) et parallèle au plan (Q).

On considère dans (R) le cercle (C) de centre W et de rayon 3.

1) Trouver une équation de (R).

2) Prouver que B (3 ; 2 ; 0) est un point de (C).

3) Ecrire un système d'équations paramétriques de la tangente (T) en B à (C).

III- (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M ' d'affixe z' telle que $z' = (\bar{z} - 2)(\bar{z} + 1)$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

On désigne par (x ; y) les coordonnées de M et par (x ' ; y ') celles de M ' .

1) Calculer x ' et y ' en fonction de x et y et montrer que lorsque M ' varie sur l'axe des ordonnées, M varie sur la courbe (C) d'équation: $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

2) a- Prouver que (C) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.

b- Tracer (C).

3) Soit E le point de (C) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.

a- Ecrire une équation de la tangente (t) en E à (C).

b- La droite (t) coupe les asymptotes de (C) en P et Q. Prouver que E est le milieu de [PQ].

4) On désigne par (D) le domaine limité par (C) et la droite d'équation x = 3.

Calculer le volume engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

IV- (3 points)

Une urne contient $n+10$ boules ($n \geq 2$): n boules blanches, 6 boules rouges et 4 boules noires.

A- On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité $q(n)$ de tirer deux boules blanches.

2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

a- Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 42}{(n+10)(n+9)}$.

b- Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} q(n)$. Interpréter ce résultat.

c- Existe-t-il un cas où $p(n) = \dfrac{31}{105}$?

B- On suppose dans cette partie que n = 3.

Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.
Si les 2 boules tirées sont de même couleur, le joueur marque + 4 points ; sinon, il marque –1 point.
Le joueur répète le jeu deux fois en remettant, après le premier jeu, les boules tirées dans l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués par le joueur.

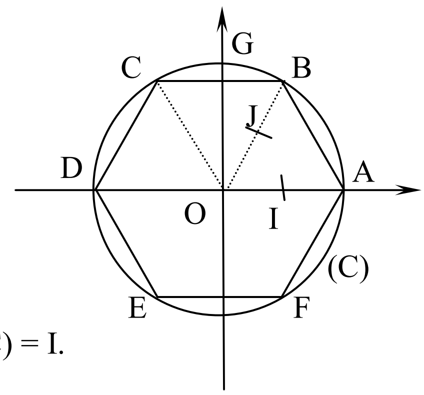
1) Justifier que les valeurs de X sont : –2 ; 3 et 8.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer l'espérance mathématique E(X).

V- (3 points)

Dans un plan orienté on donne un hexagone régulier direct ABCDEF de centre O, tel que ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3}$ (2π).
(C) est le cercle circonscrit à cet hexagone.
I et J sont les milieux respectifs de [OA] et [OB].



Soit S la similitude qui transforme A en B et B en J.

1) a- Déterminer le rapport et un angle de S.
b- Démontrer que S(D) = A. Trouver S(O) et vérifier que S(C) = I.
c -Déterminer l'image de l'hexagone ABCDEF par S

2) Le cercle (C') est l'image de (C) par S. Déterminer le centre et le rapport de chacune des deux homothéties qui transforme (C) en (C').

3) G est le milieu de l'arc BC sur le cercle (C).
Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG}$).
a-Trouver l'affixe de chacun des points B, C, E et F.
b- Écrire la forme complexe de S et déduire l'affixe de son centre W.
c- H est le point de rencontre de [AJ] et [BI]. Déterminer le point H' image de H par S.

VI- (7 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A- 1) Calculer f '(x) et déterminer le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c- Dresser le tableau de variations de f.

d- Déduire que l'équation $x^2 + \ln x = 0$, admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,7$.
Etudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

3) a- Démontrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera l'abscisse.
b- Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet sur I, une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition.
b- Soit (C') la courbe représentative de f^{-1}. Prouver que le point A(1;1) est commun à (C) et (C') et tracer (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
c- Ecrire une équation de la tangente en A à (C').
d- Soit S(α) l'aire du domaine limité par (C), (C'), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Calculer S(α).

B- Soit (T) la courbe représentative de la fonction h définie sur $I =]0;+\infty[$ par h(x) = lnx.

1) Etudier la position relative de (C) et (T) et tracer (T) dans le même repère que (C).

2) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

a- Calculer g'(x) et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$.

b- En déduire le sens de variations de g sur I.

3) Soit M_0 le point de (T) d'abscisse α et M un point quelconque de (T) d'abscisse x.

a- Calculer OM_0^2 en fonction de α et OM^2 en fonction de x.

b- Prouver que $OM_0 \le OM$ pour tout x de I.

c- Démontrer que la tangente en M_0 à (T) est perpendiculaire à (OM_0).