وزارة التربية والتعليم العالي		امتحانات الشهادة الثانوية العامة		دورة سنة 2007 الإكمالية الإستثنائية
المديرية العامة للتربية		الفرع : علوم عامة
دائرة الامتحانات

عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة : يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات .
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I – (2 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

Soit z le nombre complexe non nul défini par sa forme exponentielle $z = r\,e^{i\alpha}$ dont le conjugué est noté $\bar{z}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = z$, $z_B = \dfrac{1}{z}$ et $z_C = \dfrac{z^2}{\bar{z}}$.

1- Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres z_B et z_C en fonction de r et α.

2- Déterminer, en fonction de α, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OC})$. En déduire les valeurs de α pour que O, B et C soient alignés et que O appartienne à $[BC]$.

3- On suppose dans cette partie que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

a) Vérifier que $z_B \times \bar{z}_C = -1$.

b) Soit D le point d'affixe z_D telle que $z_D = -\dfrac{1}{\bar{z}}$.

Calculer chacun des nombres $z_B - z_D$ et $z_A - z_C$ en fonction de r et montrer que les droites (BD) et (AC) sont parallèles.

c) Démontrer que $ABDC$ est un trapèze isocèle.

II – (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

On considère les points A(–1 ; 2 ; 0), B(2 ; 1 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

1- Calculer l'aire du triangle ABC.

2- Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire la distance de O au plan (ABC).

3- a) Ecrire une équation du plan (ABC).

b) Montrer que le point $O'\left(\dfrac{18}{23};\dfrac{54}{23};\dfrac{30}{23}\right)$ est le symétrique de O par rapport au plan (ABC).

c) Calculer $\cos(\widehat{OAO'})$ ainsi que le cosinus de l'angle de la droite (AO) et du plan (ABC).

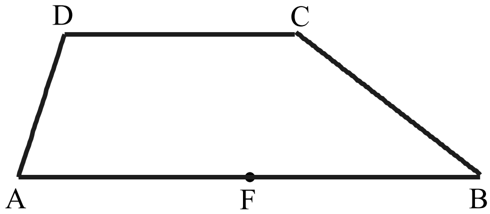
4- Soit J le milieu de [AB].

a) Vérifier que le plan (COJ) est le plan médiateur de [AB].

b) Calculer le cosinus de l'angle aigu des deux plans (COJ) et (xOz).

III – (2 points)

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que:
[AB] est fixe et AB = 12 ;
[CD] est variable et CD = 6.
Soit F le milieu de [AB].



1- a) Montrer que si le périmètre de ABCD reste égal à 28, alors *D* varie sur une ellipse (E) de foyers A et F.

b) Tracer (E).

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ **tel que** B(12 ;0)

2- a) Montrer que $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ est une équation de l'ellipse (E).

b) Calculer l'excentricité de (E) et déterminer une équation de la directrice (d) associée à A.

3- Soit L l'un des points d'intersection de (E) avec l'axe des ordonnées.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (E) en L.

b) Montrer que (T) coupe l'axe focal de (E) en un point appartenant à la directrice (d).

IV – (3 points)

Pour maintenir en bon état de fonctionnement les voitures dans une ville donnée, une société fait contrôler toutes les voitures de cette ville.
On sait que 20 % des voitures sont sous garantie.

Parmi les voitures qui sont sous garantie, la probabilité qu'une voiture ait un défaut est $\dfrac{1}{100}$.

Parmi les voitures qui ne sont pas sous garantie, la probabilité qu'une voiture ait un défaut est $\dfrac{1}{10}$.

1- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « La voiture contrôlée est sous garantie et a un défaut ».
D : « La voiture contrôlée a un défaut ».

2- Montrer que la probabilité qu'une voiture contrôlée soit sous garantie sachant qu'elle a un défaut est $\dfrac{1}{41}$.

3- Le contrôle est gratuit si la voiture est sous garantie ;
il coûte 50 000 LL si la voiture n'est pas sous garantie et n'a pas un défaut ;
il coûte 150 000 LL si la voiture n'est pas sous garantie et a un défaut.
On note X la variable aléatoire égale au coût de contrôle d'une voiture.

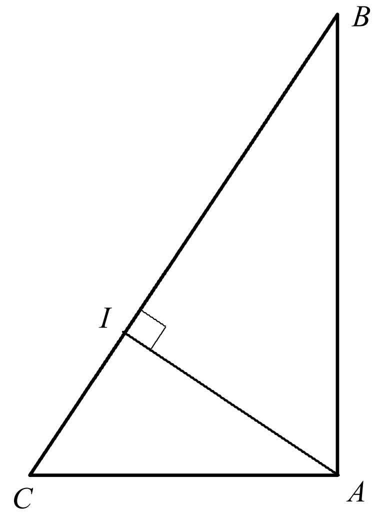
a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X.

4- La société fait contrôler en moyenne 50 voitures par jour. Estimer son coût de contrôle journalier.

V – (3 points)

On donne un triangle ABC tel que AB = 6, AC = 4 et $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.



Soit I le projeté orthogonal de A sur (BC).

1- Soit h l'homothétie de centre I qui transforme C en B.
Construire l'image (d) de la droite (AC) par h.
Déduire l'image D de A par h.

2- Soit S la similitude qui transforme A en B et C en A.
a) Déterminer le rapport et un angle de S.
b) Déterminer l'image par S de chacune des deux droites (AI) et (CB). En déduire que I est le centre de S.
c) Déterminer l'image de (AB) par S.
En déduire que S(B) = D.

3-a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de SoS.
b) Montrer que SoS(A) = h(A).
c) Montrer que SoS = h.

4- Soit E le milieu de [AC].
a) Déterminer les points F et G tels que F = S(E) et G = S(F).
b) Montrer que les points E, I et G sont alignés.

VI – (7 points)

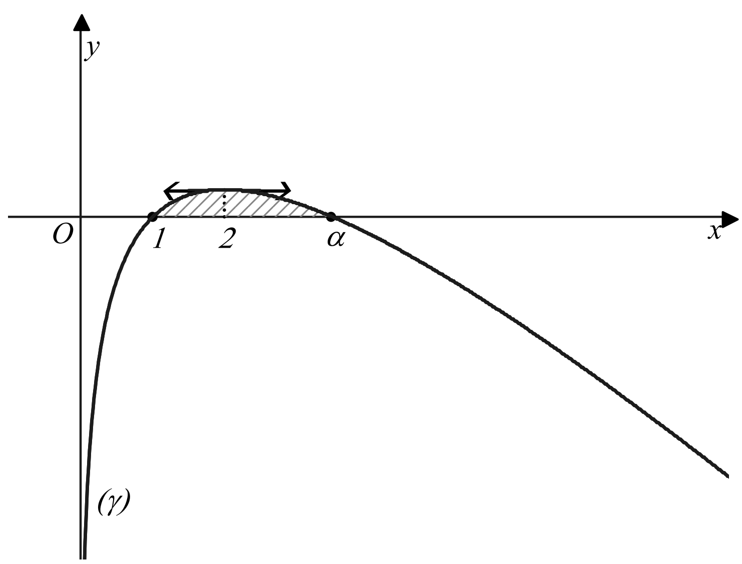
A- On considère l'équation différentielle $(I)\ :\ xy' - y = 1 - 2\ln x$.

1- Vérifier que $y_1 = 1 + 2\ln x$ est une solution particulière de l'équation (I).

2- Déterminer la solution générale Y de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

3- a) Vérifier que $Y + y_1$ est la solution générale de l'équation différentielle (I).
b) Déterminer la solution particulière y de l'équation (I) telle que $y(1) = 0$.

B- La figure ci-dessous, montre la courbe représentative (γ), dans un repère orthonormé, de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 1 - x + 2\ln x$.



1- a) Montrer que $3,51 < \alpha < 3,52$.

b) Déterminer le maximum de *h(x)*.

2- a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^{\alpha} \ln x \, dx$ en fonction de α .

b) En déduire l'aire $S(\alpha)$ du domaine hachuré limité par (γ) et l'axe des abscisses.

C- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j})$.

1- a) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b) Montrer que les axes du repère sont asymptotes à (C).

2- a) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

b) Tracer (C).

3- a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f^{-1}.

c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x) > \alpha$.

D- Soit (I_n) la suite définie, pour $n \geq 4$, par $I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

1- Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4;+\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

2- En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $0 \leq I_n \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

3- Déterminer la limite de la suite (I_n).