وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع العلوم العامة	دورة سنة 2005 الاستثنائية
عدد المسائل: ستة	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة : يُسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(1,5 pts.)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant,** la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c	Réponses d
1	La solution particulière de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 0$, qui vérifie $y(-2) = 1$, est :	$y = -2e^{\frac{x}{2}}$	$y = e^{\frac{x}{2}+1}$	$y = 2\cos x - \sin x$	$y = \sqrt{x^2 - 3}$
2	$f(x) = 2\sin(\pi x + 2)$. La période de f est : T =	π	2	2π	$\frac{\pi}{2}$
3	L'équation $2\ln x = \ln(2x)$ admet :	2 racines	Une racine unique	Aucune racine	3 racines
4	Si $f(x) = \ln\lvert -3x \rvert$, alors $f'(x) =$	$\frac{3}{x}$	$\frac{-3}{x}$	$\frac{1}{\lvert x \rvert}$	$\frac{1}{x}$
5	$e^{\frac{1}{2}\ln 9} \times e^{-\ln\frac{1}{3}} =$	e^3	6	$e^{\frac{3}{2}}$	9
6	$\cos^2(\frac{1}{2}\arccos x) =$	$\frac{1+x}{2}$	$1 + \frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}x$	$(1+x)^2$

II-(2,5points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$, on donne :

le point A(2 ; -2 ; 0) , le plan (P) d'équation x + y - 2z + 2 = 0

et la droite (d) définie par : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2\,t \\ z = -t+1 \end{cases}$ (t est un paramètre réel).

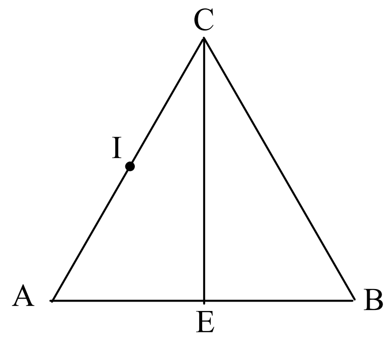
On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

1) a- Déterminer les coordonnées de B, point d'intersection de la droite (d) avec le plan (P).
   b- Vérifier que A est un point de (d).
   c- Ecrire une équation du plan (Q) contenant la droite (d) et perpendiculaire au plan (P) et en déduire un système d'équations paramétriques de la droite (BH) .
   d- Calculer la distance de A à (P).

2) a- Calculer le sinus de l'angle $\widehat{ABH}$.
   b- Calculer l'aire du triangle ABH.

III- (3points)

Dans un plan orienté, on donne un triangle équilatéral direct ABC de côté 4 cm.
On désigne par E et I les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Soit S la similitude plane directe qui transforme A en E et E en C.



1) a- Déterminer le rapport et un angle de S.
   b- Construire l'image par S de chacune des droites (AC) et (EI) et en déduire l'image de I par S.

2) Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé direct $(A\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

   a- Donner la forme complexe de S.
   b- Trouver l'affixe du point W centre de S.
   c- Démontrer que W est un point de [AC].
   d- On désigne par J l'image de I par $S \circ S$, comparer WC et WJ.

IV- (3points)

Un porte-monnaie contient exactement :

quatre billets de 10 000 LL,

deux billets de 50 000 LL

et trois billets de 100 000 LL.

A- On tire **simultanément** et au hasard **trois billets** de ce porte-monnaie.

1) Quelle est la probabilité de l'événement E : « tirer trois billets de 100 000 LL. » ?

2) Quelle est la probabilité de l'événement F: « tirer deux billets de 10 000 LL et un billet de 50 000 LL. » ?

B- On désire régler un achat de 100 000 LL. Pour cela on tire du porte-monnaie au hasard, **un à un**, et **sans remise**, des billets jusqu'à obtenir une somme égale au moins à 100 000 LL . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de billets qu'on a dû ainsi tirer du porte-monnaie.

1) a- Calculer les probabilités suivantes : $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.
   b- Justifier que 6 est la valeur maximale de X .

2) Quelle est la probabilité de tirer au moins trois billets pour régler l'achat de 100 000 LL?

V- (3points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z) = z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i$.
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1) Déterminer les points M tels que $f(z) = 0$.

2) Calculer x' et y' en fonction de x et y.

3) a- Démontrer que , lorsque M' décrit l'axe des ordonnées, le point M décrit la courbe (C) d'équation $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$.
   b- Déterminer la nature de (C) et préciser son centre I .
   c- Déterminer les sommets , les foyers , les asymptotes et les directrices de (C).
   d- Tracer la courbe (C) .
   e- Ecrire une équation de la tangente (T) et une équation de la normale (N) à la courbe (C) au point E(2 ; 1) .

VI- (7points)

Soit f la fonction définie, sur $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$, par $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; (*unité : 2 cm)* .

A- 1) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

3) a- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse e.
   b- Ecrire une équation de la tangente (d) à (C) au point W.

4) Etudier suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et de la droite (D) d'équation y = x .

5) Tracer (d), (D) et (C).

B- Soit l'intervalle I = [1 ; e].

1) a- Démontrer que f(I) est inclus dans I.
   b- Etudier le signe de $f'(x) - \dfrac{1}{4}$ et en déduire que, pour tout x de I, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.
   c- Démontrer que, pour tout x de I, on a : $|f(x) - 1| \leq \dfrac{1}{4}|x - 1|$.

2) Soit (U_n) la suite définie par :
   $U_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a- Démontrer par récurrence sur n que U_n appartient à I.
   b- Démontrer que $|U_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{4}|U_n - 1|$.
   c- Démontrer que $|U_n - 1| \leq \dfrac{1}{4^n}$ et en déduire la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.