عدد المسائل :أربع

مسابقة في الرياضيات
المدة : ساعتان

الاسم :
الرقم :

ملاحظة : يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I - (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B tels que : $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

1) a- Ecrire $z_B - z_A$ sous forme exponentielle .
b-Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}\,; \overrightarrow{AB})$.
c- Montrer que le point B appartient au cercle (C).

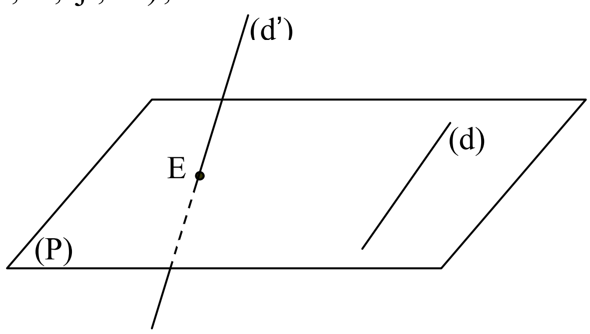
2) A tout point M d'affixe z, non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z}}$.
a- Démontrer que $\bar{z}\,(z' - 1) = 2$.
b-En déduire que, lorsque M' décrit le cercle (C), M décrit un cercle (T) à déterminer.

II - (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
on donne les droites (d) et (d') définies par :

$$(d) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (d') : \begin{cases} x = 2m \\ y = -m + 1 \\ z = m + 1 \end{cases}$$

(t et m sont deux paramètres réels).



1) Démontrer que (d) et (d') sont non coplanaires.

2) a- Montrer que x – y + z = 0 est une équation du plan (P) déterminé par O et (d).
b- Déterminer les coordonnées du point E intersection de (P) et (d').
c- Démontrer que la droite (OE) rencontre (d).

3) a- Calculer la distance du point O à la droite (d).
b- En déduire que le cercle ,du plan (P), de centre O et passant par E, est tangent à (d).

III - (9points)

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = x + 2\,\dfrac{\ln x}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; unité 2 cm .

1) a - Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

b - Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C) .

c - Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.

x	0		e		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$1-e^{-3}$	$\nearrow$	1

a - Montrer que f est strictement croissante sur son domaine de définition et dresser son tableau de variations .

b - Ecrire une équation de la tangente (D) à (C) au point G d'abscisse e.

c - Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion L.

d - Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique α et vérifier que $0{,}75 < \alpha < 0{,}76$.

3) Tracer (D) , (d) et (C) .

4) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations x = 1 et x = e .

IV - (4points)

On dispose de deux urnes U et V :

U contient **trois** boules numérotées 0 et **deux** boules numérotées 1.

V contient **cinq** boules numérotées de 1 à 5.

A - On tire au hasard **une** boule de chaque urne et on désigne par X la variable aléatoire égale au produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.

1) Démontrer que P(X = 0) est égale à $\dfrac{3}{5}$.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

B - Dans cette partie on place les **dix boules** des urnes U et V dans une même urne W.

On tire simultanément et au hasard **deux** boules de l'urne W.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) On désigne par q le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.

a - Montrer que la probabilité P(q = 0) est égale à $\dfrac{8}{15}$.

b - Calculer la probabilité P(q < 4).