وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات شهادة الثانوية العامة
فرع العلوم العامة

دورة سنة 2004 العادية

عدد المسائل : ستة

مسابقة في الرياضيات
المدة : أربع ساعات

الاسم :
الرقم :

ملاحظة : يُسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I - (2 points)

Soit f la fonction définie, sur [–3 ; 3], par $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.
2) Tracer la courbe (C).
3) On considère l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.
   Montrer que (C) est une partie de (E) et tracer (E).
4) A l'aide du changement de variable $x = 3\cos\theta$, on trouve :
   $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 6\int_{0}^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$ (on ne demande pas de démontrer cette égalité).
   Déduire de cette égalité l'aire du domaine limité par (E).

II - (3points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
On donne les droites (d) et (d') définies par :

$$(d):\begin{cases}x=2t+1\\ y=-2t-1\\ z=t+2\end{cases} \quad \text{et} \quad (d'):\begin{cases}x=m\\ y=2m-3\\ z=2m\end{cases}$$ (t et m sont deux paramètres réels) .

1) Montrer que les droites (d) et (d') sont concourantes au point A (1 ; –1 ; 2) et qu'elles sont perpendiculaires.
2) Ecrire une équation du plan (P) déterminé par (d) et (d') .
3) Dans le plan (P) on donne la droite (D) définie par :

$$(D):\begin{cases}x=3\lambda-1\\ y=-1\\ z=3\lambda\end{cases} \quad (\lambda \text{ est un paramètre réel}).$$

   a- Démontrer que la droite (D) est une bissectrice de l'un des angles formés par (d) et (d').
   b- E (-1 ; -1 ; 0) est un point de (D) ; on désigne par (C) le cercle du plan (P) , de centre E , tangent en T à (d) et en S à (d').
      Déterminer la nature du quadrilatère ATES et calculer la longueur AT.
   c- Ecrire une équation du plan médiateur de [AE] et en déduire un système d'équations paramétriques de la droite (TS).

III - (2,5points)

Une agence de tourisme propose à ses clients des voyages de 7 jours avec deux options : pension complète ou demi - pension .
L'agence publie l'annonce publicitaire suivante :

Destination \ Option	Pension complète	Demi - pension
France	1 500 000 LL	1300 000 LL
Italie	1 250 000 LL	1100 000 LL
Turquie	800 000 LL	700 000 LL

Cette agence estime que 25 % de ses clients choisissent la France, 35 % l'Italie et le reste la Turquie et que parmi les clients de chaque destination, 60 % choisissent la pension complète.
On interroge au hasard un client.

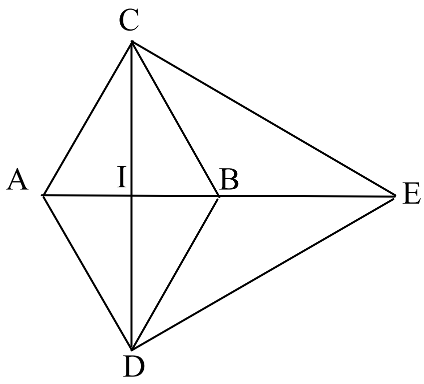
Soit les événements suivants :
F : « le client interrogé a choisi la France ».
I : « le client interrogé a choisi l'Italie ».
T : « le client interrogé a choisi la Turquie ».
C : « le client interrogé a choisi la pension complète ».

1) a- Calculer les probabilités suivantes :
$P(C \cap F)$; $P(C \cap I)$; $P(C \cap T)$ et $P(C)$.
b- Le client interrogé a choisi la pension complète, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'Italie ?

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée à l'agence par un voyageur.
a- Déterminer la loi de probabilité de X .
b- Calculer l'espérance mathématique E(X). Que représente le nombre ainsi trouvé ?
c- Estimer la somme reçue par l'agence lorsqu'elle sert 200 voyageurs.

IV - (3points)

Dans la figure ci-contre,
ABC , ADB et CDE sont trois triangles équilatéraux directs tels que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.



On désigne par I le milieu de [AB] .

1) Montrer que AE = 2AB.

Soit S **la similitude directe de centre** W, **de rapport** k **et d'angle** θ **qui transforme** A **en** B **et** E **en** D.

2) Déterminer k et vérifier que $\theta = \frac{-2\pi}{3} \quad (2\pi)$.

3) On désigne par (T) le cercle circonscrit au triangle ACE.
Démontrer que le transformé de (T) par S est le cercle (T ') de diamètre [BD] et déduire que l'image du point C par S est le point J milieu de [DE].

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$.

a- Déterminer les affixes des points B , C , D et E.

b- Donner la forme complexe de S et préciser l'affixe de son centre W.

5) Soit S' la similitude directe de centre W, de rapport 2 et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

a- Déterminer la nature et les éléments de la transformation S'oS .

b- Calculer l'affixe du point A' transformé de A par S'oS .

V - (2,5points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 3 cm) ,
on donne les paraboles (P) et (P') d'équations respectives $y^2 = 2x - 1$ et $x^2 = 2y - 1$.

1) Déterminer le sommet, le foyer et la directrice de chacune de ces deux paraboles.

2) Vérifier que le point A (1 ; 1) est commun à (P) et (P') et démontrer que (OA) est une tangente commune aux deux paraboles.

3) Démontrer que la perpendiculaire (d) en O à (OA) est une tangente commune à (P) et (P').

4) Tracer (d) , (P) et (P').

5) L'aire du domaine limité par (P), l'axe des abscisses et la droite d'équation x = 1 vaut 3 cm^2.
Déduire l'aire, en cm^2, du domaine limité par (P), (P') , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

VI - (7 points)

A- Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = 2$.
On pose $z = y - 1$.

1) Former une équation différentielle (E_1) satisfaite par z et résoudre (E_1).

2) Déduire la solution générale de (E) et trouver la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$, est tangente en O à l'axe des abscisses.

B- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3) Trouver $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec son asymptote (d).

6) Tracer (d) et (C).

7) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , son asymptote (d) et l'axe des ordonnées .

8) Soit g la fonction donnée par $g(x) = \ln(f(x))$, et (G) sa courbe représentative .

a- Justifier que le domaine de définition de g est $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations .

b- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est une asymptote à (G) .

c- Résoudre chacune des équations $g(x) = 0$ et $g(x) = -2x$.

d- Tracer (D) et (G) dans un autre repère.