UNIVERSITE SAINT JOSEPH

ESIB

Maths pour ingénieurs.

Examen De Rattrapage- Fevrier 2012

Durée : 2h

Enseignant: J.Saab

---

1. ($20pts$)

   (a) Déterminer les pôles de $\dfrac{1}{z^3+z}$ en précisant leurs ordres

   (b) Calculer

   $$\int_{C^+} \frac{\cos z}{z^3+z} dz$$

   où (C) est la courbe:

   1. $|z| = 2$
   2. $|z| = \frac{1}{2}$
   3. $|z - \frac{1}{2}| = 1$

---

2. ($20pts$) On donne $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

   (a) Vérifier que cette écriture est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$

   (b) Donner le développement en série de Laurent de $\sin(\frac{1}{z-1})$ au voisinage de 1

   (c) En déduire la valeur de

   $$\int_{c^+} (z-1)^2 \sin(\frac{1}{z-1}) dz$$

   où (C) est un contour fermé contenant le point $z = 1$.

---

3. ($15pts$) Les questions suivantes sont indépendantes:

   (a) Calculer en utilisant la fonction Beta l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos^2 x - 3\sin x\right)^3 dx$

   (b) Calculer en utilisant la fonction Gamma l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-(\ln u)^5} du.$

   (c) Calculer en fonction de $J_0(x)$, $J_1(x)$ et de $\displaystyle\int J_0(x)dx$ l'intégrale $\displaystyle\int x^3 J_1(x) dx.$

---

4. ($15pts$) On considère l'équation différentielle du second ordre suivante:

   $$4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0 \qquad (B)$$

   (a) On pose $Y = y\sqrt{x}$ montrer que l'équation (B) est équivalente à

   $$Y'' + Y = 0 \qquad (E)$$

(b) Résoudre l'équation (E) et déduire la solution de (B).

(c) Retrouver la solution de (B) en utilisant les fonctions de Bessel. (on donnera la solution en fonction des fonctions usuelles).

---

5. (15*pts*) Soit $f(t)$ une fonction réelle définie $\forall t \geq 0$; la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est une fonction complexe donnée par:

$$F(z) = L(f(t))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

(a) On pose $x = zt$, montrer que $\Gamma(n+1) = \frac{1}{z^{n+1}} L(t^n)(z)$.

(b) Déduire les transformations de Laplace des fonctions $\frac{1}{\sqrt{t}}$, $\sqrt{t}$, $\sqrt{t^5}$.

---

6. (15*pts*) Résoudre l'EDP suivante: $x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x} = x$ telle que $u(x,0) = \frac{1}{x^2}$

On donne les formules suivantes:

- L'équation de Bessel d'ordre $n \in IR^+$ est

$$(B_n): \ x^2 y^{''} + xy^{'} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad n \geq 0$$

- la fonction de Bessel de $1^{ère}$ espèce est: $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{n+2r}}{r!\Gamma(n+r+1)}$
- $c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x)$ est la solution générale de $B_n \quad \forall n \notin IN$
- $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$
- $J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$
- $xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$
- $xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$
- $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$
- $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$
- $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

La fonction Gamma est définie par

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

La fonction Beta est définie par:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta d\theta$$

- $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$