UNIVERSITE SAINT JOSEPH

ESIB

Maths pour ingénieurs.

Examen Partiel- Octobre 2011

Durée : 1h30

Prof. Jihad Saab

---

1. ($20pts$) Les parties suivantes sont indépendantes:

   (a) Montrer que la fonction $f(z)$ est holomorphe et donner $f'(z)$

   $$f(z) = (x-y)^2 - 2y^2 + i[(x+y)^2 - 2y^2]$$

   (b) Vérifier que la fonction $P(x,y)$ est harmonique et trouver une fonction $g(z)$ holomorphe dont P est la partie réelle

   $$P(x,y) = e^{2+3x}\cos(3y)$$

---

2. ($35pts$) Soit la couronne $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2\}$. et soit le polynôme $P(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$. L'objectif est de déterminer le nombre de zéros de $P(z)$ dans D

   (a) En écrivant $P(z)$ sous la forme $P(z) = f(z) + g(z)$ et en appliquant ensuite le théorème de Rouché, montrer que $P(z)$ admet 3 zéros à l'interieur du cercle unité

   (b) En réitérant la même procédure que dans la partie a) mais avec un choix différent pour f et g, trouver le nombre de zéros de $P(z)$ dans le cercle de centre o et de rayon 2 en déduire le nombre de zéros de $P(z)$ dans D

   (c) Déterminer dans D le développement en série de Laurent en z^n, $n \in \mathbb{Z}$, de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$

---

3. ($45pts$) Soit la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z-i)^2}$. On considère le contour fermé (C) constitué du demi-cercle $\Gamma(0,R)$, $y \geq 0$ et le segment $-R \leq x \leq R$ de l'axe réel avec $R > 1$.

   (a) En utilisant le théorème des résidus évaluer l'intégrale $\int_{C_+} f(z)dz$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0$

   (c) Déduire la valeur des intégrales:

   $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{(x^2+1)^2}dx$$
