UNIVERSITE SAINT JOSEPH
ESIB
Maths pour ingénieurs.
Examen Final- Janvier 2012
Durée : 2h

Prof. Jihad Saab

---

1. (15min) On considère la fonction réelle

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

   (a) Donner la transfomation de Fourier $F(\alpha)$ de $f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   (b) Déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha . \cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$

   (c) Déduire d'après b) et en utilisant l'identité de Parseval la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx$

---

2. (15min) Soit (C) le contour fermé formé du segment $[-R, -r]$ suivi du demi cercle inferieur de centre O et de rayon r, suivi du segment $[r, R]$ et finalement suivi du demi cercle superieur de centre O et de rayon R, où $r < R$, comme dans la figure -1- ci contre

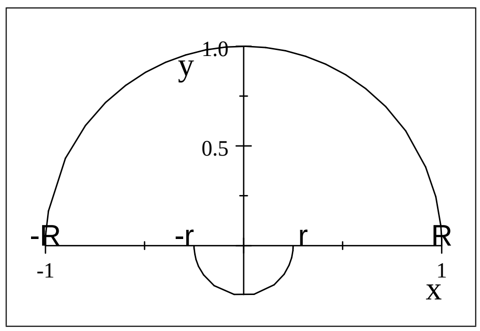


Fig -1-

Calculer $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{iz}}{z} dz$ et déduire $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

---

3. (10min) On considère l'E.D.P.

$$(E) : \ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad x \neq 0$$

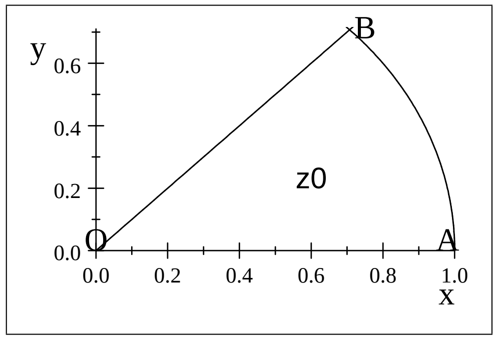
   (a) Poser $v = xy$, $w = \dfrac{y}{x}$ et transformer l'équation (E) en une E.D.P. en $v, w, \dfrac{\partial u}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial w}$

   (b) Résoudre (E)

   (c) Donner la solution de (E) qui vérifie $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} & = & \frac{x^3+y}{x^2} \\ u(1,0) & = & 1 \end{cases}$

---

4. (1h) A-On voudrait dans cette partie calculer
$$I = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^{\alpha}}, \quad \alpha > 1$$
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{p}{q}$ tel que $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p > q$. En posant $u = t^q$, exprimer I sous forme d'une intégrale en t
   (b) Soit
$$f(z) = \frac{z^{q-1}}{1+z^p}, \quad z \in \mathbb{C}$$
   Donner tous les pôles de f
   (c) On va poser $z_0 = e^{i\dfrac{\pi}{p}}$ et soit le contour sectoriel $(C) : \widehat{OABO}$



   avec $A = R \in x^{'}x, B = R.e^{2i\dfrac{\pi}{p}}$, $R > 1$. Calculer $J = \int_{C^+} f(z)dz$ (Ind. z_0 est l'unique pôle à l'interieur du contour)
   (d) Soit $J = J_1 + J_2 + J_3$ avec $J_1 = \int_{[OA]} f(z)dz$, $J_2 = \int_{\widehat{AB}} f(z)dz$ et $J_3 = \int_{[BO]} f(z)dz$. Exprimer J_3 en fonction de J_1
   (e) En faisant tendre $R \longrightarrow \infty$, déduire que $I = \dfrac{\pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})}$

   B- Dans cette partie, on voudrait montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, $0 < x < 1, x \in \mathbb{Q}$.
   (a) Soit $x \in]0,1[$. Vérifier moyennant à un changement de variable convenable que
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^{1/x}}$$
   (b) En déduire que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$
   (c) Déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
   (d) En utilisant cette dernière partie et en faisant un changement de variable convenable, déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

---

5. (20min) On rappelle quelques propriétés de la transformation de Laplace:
$$\begin{cases} L(x.f(x))(z) &= -\frac{d}{dz} L(f(x))(z) \\ L(y^{''}(x))(z) &= z^2.L(y(x))(z) - z.y(0) - y^{'}(0) \\ L(y^{'}(x))(z) &= z.L(y(x))(z) - y(0) \end{cases}$$
   On va noter par $J_0(x)$ la solution de l'équation de Bessel
$$(E) : \ xy^{''}(x) + y^{'}(x) + x.y(x) = 0 \text{ telle que } y(0) = 1 \text{ et } y^{'}(0) = 0$$
   On va poser $Y(z) = L(y(x))(z)$,où L désigne la transformation de Laplace.

(a) En appliquant à (E) la transformation de Laplace, vérifier que l'équation différentielle en $Y(z)$ associée à (E) est

$$(F): \ (1+z^2)Y'(z) + zY(z) = 0$$

(b) En déduire que

$$J_0(x) = L^{-1}(\frac{1}{\sqrt{z^2+1}})(x)$$

où L^{-1} désigne la transformation de Laplace inverse

(c) En rappelant que $L(f*g)(z) = L(f)_{(z)}.L(g)_{(z)}$ où $*$ désigne le produit de convolution, déduire que $J_0(t)*J_0(t) = \sin t$

Formules utiles:

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}.e^{-t}dt; \quad \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt; \quad \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$ est la transformation de Fourier de $f(x)$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$ est la transformation inverse de Fourier de $F(\alpha)$

L'identité de Parseval pour une fonction paire $f(x)$ est

$$\int_0^{\infty} (f(x))^2 dx = \int_0^{\infty} (F_c(\alpha))^2 d\alpha$$

où $F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx$

Barème:

I) 15pts II) 15pts III) 10pts IV) 40pts V) 20pts