INSTITUT DES SCIENCES APPLIQUEES ET ECONOMIQUES (ISAE)
Centre associé au CNAM de Paris

MVA 006 : APPLICATIONS DE L'ANALYSE A LA GEOMETRIE, INITIATION A L'ALGEBRE LINEAIRE

Feuille de TD N°7

Exercice 1 :

Considérons les matrices suivantes : $M=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&3\\1&1&0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) Calculer M^2, M^3
2) Déterminer trois constantes réelles a,b,c telles que $M^3=aM^2+bM+cI$
3) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.
4) Retrouver cette matrice inverse en utilisant la méthode des cofacteurs.

Exercice 2 :

Considérons la matrice suivante $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

1-Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2-Que valent A^3, A^4 ?
3-Déterminer $\det(A)$ et $Rang(A)$.
4-Les polynômes suivants de $\mathbb{R}[x]$ sont-ils liés? :

$1+x+x^2+x^3$; $1+x-x^2-x^3$; $1-x+x^2-x^3$; $1-x-x^2+x^3$

Exercice 3 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}m&3&0\\1&m&1\\0&1&m\end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

1-Calculer le déterminant de A.
2-Quelles valeurs faut-il donner à m pour que A soit inversible ?
3-On pose $m=1$ pour cette question.
3-1) Montrer alors que A est inversible et calculer A^{-1}.
3-2) Déterminer dans chaque cas la matrice X vérifiant la relation donnée :

a) $AX=B$ où $B=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ b) $AX=C$ où $C=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$

4-Résoudre le système linéaire suivant dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases}mx+3y=1\\x+my+z=2\\y+mz=-1\end{cases}$ où m est un paramètre réel.

Exercice 4:

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$\overrightarrow{u_1} = (1,4,2,-1)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,-2,-2,1)$, $\overrightarrow{u_3} = (3,8,2,-1)$, $\overrightarrow{u_4} = (2,2,-2,1)$

1-Etudier le rang de la famille $F = \{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4}\}$.

2-Préciser une base et la dimension du sous-espace vectoriel E engendré par la famille F.

Exercice 5:

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+y+z,\ x-y-z,\ x-y+z)$$

1-Quelle est la matrice A associée à f dans la base canonique $B_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$?

2-Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même (c-à-d un automorphisme de $\mathbb{R}^3$).
Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3-Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

Exercice 6:

Soient $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, et $\mathbb{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 1.

Considérons l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$

$$P(X) \mapsto P'(X) + X.P''(X)$$

1) Calculer les polynômes suivants : $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(1+X)$ et $\varphi(1+X-X^2)$.
2) Montrer que $B_1 = (1,\ 1+X,\ 1+X-X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
3) Soient B_0 et C_0 les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$ respectivement.
   Déterminer alors les matrices suivantes : $A = mat(\varphi, B_0, C_0)$ et $B = mat(\varphi, B_1, C_0)$
4) Calculer le polynôme $\varphi(2-3X+5X^2)$.
   a) sans utiliser la matrice A ni la matrice B
   b) en utilisant la matrice A
   c) en utilisant la matrice B
5) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P'(X) + X.P''(X) = 2 + X$

Exercice 7 :

On note $M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On considère alors l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$

1-Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Préciser une base et la dimension de E

2- Montrer que pour toutes matrices A, B appartenant à E on a : $A.B \in E$.
En déduire que $\forall M \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n \in E$.

3-Déterminer toutes les matrices inversibles de E, et montrer que $\forall M \in E$, si M est inversible alors $M^{-1} \in E$.

Exercice 8:

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ suivant $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (2x+\frac{2}{3}y,\ -\frac{5}{2}x-\frac{2}{3}y)$$

1-Quelle est la matrice A associée à f dans la base canonique $B_0=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$?

2-Considérons alors les vecteurs $\overrightarrow{u_1}=(-2,3)$ et $\overrightarrow{u_2}=(-2,5)$

2-1) Montrer que $B_1=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $D=mat(f,B_1)$.

2-2) Quelle relation existe-t-il entre A et D ?

3-Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A ? f est-elle bijective ?

4-Calculer D^{2008} et en déduire A^{2008}.

Exercice 9:

On note $B=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme suivant $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto (-4x-y,\ -x-4y+z,\ -2z)$$

1-Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$.

2-Calculer les valeurs propres de A, et déterminer les sous-espaces propres correspondants.

3-En déduire que A est diagonalisable et donner alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP=D$.

4-Donner alors l'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}$.