1. On se met dans l'e.v. $\mathbb{R}^3$ muni des lois habituelles. Soit:

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & = 0 \\ 2x & -y & & = 0 \end{array}\right. \} \\ G &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-y)^2 = 2x+y\} \end{aligned}$$

   (a) Vérifier que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ alors que G ne l'est pas
   (b) Trouver une base de F et en dvduire sa dimension
   (c) Quelle est l'interprétation géométrique de F

---

2. On se met dans $M_2(\mathbb{R})$ muni des lois habituelles. On considère les sous ensembles:

$$\begin{aligned} E &= \{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}\} \\ F &= \{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

   (a) Vérifier que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ alors que G ne l'est pas
   (b) Trouver une base de F et en dvduire sa dimension

---

3. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ où $v_1 = (1,2),\ v_2 = (-1,1)$ engendre $\mathbb{R}^2$. Est-elle une base?

---

4. La famille $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ où $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (2,1,3)$, $v_3 = (0,-1,5)$ est -elle libre? Est-elle génératrice? Quelle relation linéaire lie ces vecteurs? Quel est l'espace qu'ils engendrent?

   (a) Le corps $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $E = \{A\in M_n(\mathbb{k}) \mid tr(A) = 0\}$ est un s.e.v. de $M_n(\mathbb{k})$. En donner une base pour $n = 2$
   (b) Montrer que $F = \{P\in\mathbb{R}_2[x] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)x + \mu x^2\ \ (\lambda,\ \mu\in\mathbb{R})\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[x]$. En donner une base

---

5. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes à coèfficients réels de degré ≤ 2. Soit

$$E = \{P\in\mathbb{R}_2[x] \mid P(-1) = 0\} \text{ et } F = \{P\in\mathbb{R}_2[x] \mid P(1-x) = P(x)\}$$

   (a) Montrer que E et F sont deux s.e.v de $\mathbb{R}_2[x]$. En donner une base de chacun d'eux et déduire leurs dimensions
   (b) E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$?

---

6. On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = I_2$. On définit l'ensemble

$$E = \{M\in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

   (a) Montrer que E est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$

(b) Montrer que $\{A, I\}$ est un système de générateurs de E, en dvduire la dimension de E

(c) Résoudre dans E l'équation: $X - A^2X + AXA - A = 0$.

---

7. Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels, et soit $V = E \times F$. On pose

$$U = \{(x, 0), x \in E\} \qquad \text{et} \qquad W = \{(0, x), x \in F\}$$

Montrer que U et W sont deux sous-espaces vectoriels de V, et que $V = U \oplus W$

---

8. Soit

$$\begin{array}{rcl} U & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); b + c + d = 0 \right\} \quad \text{et} \\ V & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a + b = 0 \text{ et } c = 2d \right\} \end{array}$$

(a) Montrer que U et V sont deux sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$

(b) Trouver une base de U, V, et $U \cap V$ et en déduire leur dimension respective

(c) On pose $W = U + V$. Trouver une base de W. A-t-on $W = U \oplus V$? Pourquoi?

---

9. On donne les éléments suivants de $\mathbb{R}_4$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (1;1;0;-1), \quad x_2 = (1;2;3;0), \quad x_3 = (2,3,3,-1), \\ x_4 & = & (1;2;2;-2), \quad x_5 = (2;3;2;-3), \quad x_6 = (1;3;4;-3) \end{array}$$

Trouver les dimeensions de $U + V$ et de $U \cap V$ dans les cas suivants:

(a) $U =< x_1, x_2, x_3 >$ et $V =< x_4, x_5, x_6 >$

(b) $U =< x_1, x_2 >$ et $V =< x_1, x_3, x_4 >$