INSTITUT DES SCIENCES APPLIQUEES ET ECONOMIQUES (ISAE)
Centre associé au CNAM de Paris

MVA 006 : APPLICATIONS DE L'ANALYSE A LA GEOMETRIE, INITIATION A L'ALGEBRE LINEAIRE

Feuille de TD N°6

Exercice 1 :

Dire si W est ou n'est pas un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans les cas suivants:

a) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\neq 0\}$
b) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-3z=0\}$
c) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-3z=1\}$
d) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2+3z^2=0\}$
e) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0\}$
f) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\in\mathbb{Q}\}$

On précisera une base et la dimension de W dans chaque cas où ce dernier est un s.e.v.

Exercice 2 :

Montrer que l'ensemble $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
En déduire que l'union de deux s.e.v. d'un e.v. E, n'est pas forcément un s.e.v de E.

Exercice 3 :

On se place dans l' e.v. $\mathbb{R}^3$ muni des lois habituelles. Considérons alors les ensembles suivants:

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y+z=0 \text{ et } 2x-y=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-y)^2=2x+y\}$

1) Vérifier que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ alors que G ne l'est pas.
2) Trouver une base de F et en déduire sa dimension.
3) Quelle est l'interprétation géométrique de F ?

Exercice 4 :

Trouver la valeur qu'il faut donner au paramètre réel m pour que le vecteur $\vec{u}=(m,-1,3)$ soit une combinaison linéaire des vecteurs suivants : $\vec{v}=(3,0,-2)$, $\vec{w}=(2,-1,-5)$

Exercice 5 :

Considérons les vecteurs $v_1=(1,-1,0)$, $v_2=(2,1,3)$, $v_3=(4,5,9)$, $w_1=(1,1,1)$, $w_2=(3,-4,4)$.

1) Etudier la liberté des familles suivantes : $\{v_1,v_2,v_3\}$, $\{w_1,w_2\}$
2) Soient $F=vect(v_1,v_2,v_3)$ et $G=vect(w_1,w_2)$.
   Déterminer une base et la dimension de F, G et $F\cap G$
3) Montrer que la famille $\{(4,-1,3),(-1,-2,-3)\}$ est une base de F. Quelles sont les coordonnées du vecteur $v_1+v_2+v_3$ relativement à cette base ?

Exercice 6 :

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤
On considère les ensembles suivants : $E=\{P\in\mathbb{R}_2[x] : P(-1)=0\}$, $F=\{P\in\mathbb{R}_2[x] : P(1-x)=P(x)\}$.

1) Montrer que E, F sont des s.e.v. de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer leurs dimensions.
2) Quelle est la dimension de $E\cap F$?

Exercice 7:

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ étant rapportés à leurs bases canoniques respectives $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ et $C=\{\vec{i},\vec{j}\}$ on considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : u($\vec{e_1}$)=(3,4), u($\vec{e_2}$)=(0,5) et u($\vec{e_3}$)=(-1,0)

1) Calculer les images par u des vecteurs suivants : (3,0,1), (1,1,1)
2) Calculer u(x,y,z) pour tout vecteur $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation suivante d'inconnue $\vec{a}$: u$(\vec{a})=\vec{i}-2\vec{j}$

Exercice 8:

Soit l'application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)\mapsto(x,x-y,y+z)$$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.
3) f est-elle bijective ? Si oui déterminer sa réciproque.
4) Déterminer l'antécédent du vecteur $\vec{v}=(1,-1,2)$ par f.

Exercice 9:

Soient $\mathbb{R}_2[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, et $\mathbb{R}_1[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 1.

Soit l'application $\varphi:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_1[x]$

$$P(x)\mapsto P'(x)+xP''(x)$$

1) Montrer que φ est linéaire.
2) Déterminer $Ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.