1. (a) Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de $\mathrm{IR}^3$ la projection $f$ sur le plan $\pi$ d'équation $x+2y+3z=0$ parallèlement à la droite $D$ d'équation $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z$

   (b) Ecrire la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\{v_1,\ v_{2,}v_3\}$ où $\{v_{1,}v_2\}$ est une base de $\pi$ et $v_3$ est une base de $D$. En déduire la matrice de $f$ trouvée dans la partie **a**.

---

2. Dans $IR^n$ On appelle longueur du vecteur $v=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ le scalaire

$$||v||=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

Montrer que les rotations de centre $O$ dans le plan $IR^2$ conservent la longueur des vecteurs, la rotation étant définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{-}\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

---

3. Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ On appelle trace de $A$

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn}$$

   (a) Montrer que l'application
   $$tr: M_n(IR)\longrightarrow IR$$
   est une forme linéaire

   (b) Montrer que $tr(AB)=tr(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace

   (c) Montrer que l'on ne peut pas trouver de matrices $A,\ B$ dans $M_n(C)$ telles que
   $$AB-BA=I$$

---

4. Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f: & IR_2[x] & \longrightarrow & IR[x] \\ & P & \rightarrow & (ax+1)P+(bx^2+c)P' \end{array}$$

Quelles relations doivent vérifier $a$ $b$ et $c$ pour que $f$ soit un endomorphisme de $IR_2[x]$? Déterminer dans ce cas le rang de $f$

---

5. Soit l'homomorphisme d'e.v.

$$\begin{array}{llll} f: & IR^4 & \longrightarrow & IR^3 \\ & (x,y,z,t) & \rightarrow & (x-y+z+t,x+2z-t,x+y+3z-3t) \end{array}$$

Déterminer une base de $Ker\ f$ et une base de $\mathrm{Im}\,f$

---

6. Soit la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f$ l'application associé à $M$ définie par

$$\begin{array}{llll} f: & M_2(IR) & \longrightarrow & M_2(IR) \\ & A & \rightarrow & AM-MA \end{array}$$

(a) Vérifier que $f$ est un endomorphisme d'e.v.

(b) Déterminer une base de $Ker\ f$ et une base de $\operatorname{Im} f$

---

7. Soit

$$\begin{array}{llll} \varphi : & IR_n[x] & \longrightarrow & IR^{n+1} \\ & P & \rightarrow & (P(0), P(1), \cdots, P(n)) \end{array}$$

Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme d'e.v.

---

8. Soit $E$ un e.v. On appelle projecteur un endomorphisme $P$ de $E$ telque $P^2 = P$. Montrer que si $P$ est un projecteur alors $E = Ker\ f \oplus \operatorname{Im} f$

---

9. Soit $f$ une application linéaire bijective de $E$ dans $F$ (c'est -à-dire un isomorphisme). Montrer que $f^{-1}$ est une application linéaire

---

10. Soit $h \in IR$ et:

$$\begin{array}{llll} \varphi_h : & \mathrm{IR}_n[x] & \longrightarrow & \mathrm{IR}_n[x] \\ & \mathrm{P} & \rightarrow & \mathrm{Q} \end{array} \qquad \text{avec } Q(x) = P(x+h)$$

Montrer que $\varphi_h$ est un isomorphisme

---

11. Soit $f$ l'endomorphisme de $IR^3$ qui dans la base canonique est représentée par la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\ker f$, une base de $\operatorname{Im} f$ et l'équation de $\operatorname{Im} f$

---

(a) Existe-t-il des applications linéaires $f : IR^4 \longrightarrow IR^3$ telles que $\ker f$ soit engendré par le vecteur $v = (1,1,0,-1)$ et $\operatorname{Im} f$ soit le plan d'équation $x + y - z = 0$?

(b) Déterminer la forme générale des matrices qui représentent dans les bases canoniques de $IR^4$ et de $IR^3$ les applications linéaires $f : IR^4 \longrightarrow IR^3$ pour lesquelles $\ker f = [v_1, v_2]$ avec $v_1 = (1,1,0,-1)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$ et $\operatorname{Im} f$ soit le plan $\pi$ d'équation $x + y - z = 0$

---