Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Septembre-Durée:3h00
$3^{\text{ième}}$ session-
2011-2012

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth-Baakline-Tyr-Baalbek-Ghazza-Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Examen deRattrapage (Solution)
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \sqrt{1 - |x+3|}$$

Réponse: $1 - |x+3| \geq 0$ c'est à dire $|x+3| \leq 1$ et donc $-1 \leq x+3 \leq 1$ et parsuite $x \in [-4, -2]$

(b) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & si \quad x \leq 2 \\ x^2 + 2bx + a & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable au point $x = 2$.
Réponse: si f est dérivable alors elle est obligatoirement continue ainsi on a

$$\begin{cases} f \text{ est continue en 2 donc } \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \\ f \text{ est dérivable en 2 donc } f^{'}(2^-) = f^{'}(2^+) \end{cases}$$

ainsi la condition de continuité domme

$$4a + 2b + 2 = 4 + 4b + a$$

La dérivée de f est

$$f^{'}(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x + 2b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

la condition de dérivabilité en 2 se traduit par l'équation

$$4a + b = 4 + 2b$$

ainsi on est amené à resoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 3a - 2b & = & 2 \\ 4a - b & = & 4 \end{cases}$$

il en vient que $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{4}{5}$

---

2. (a) Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$f(x) = \frac{2 - |x|}{2 + x}, \text{ pour } x \in [-1, 1]?$$

Réponse: On a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+x}{2+x} = 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ \dfrac{2-x}{2+x} & \text{si} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

et donc sa dérivée

$$f^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-1, 0[\\ \dfrac{-4}{(2+x)^2} & \text{si} \quad x \in]0, 1[\end{cases}$$

il en vient que $f^{'}(0^-) = 0 \neq f^{'}(0^+) = \frac{-4}{4} = -1$ donc f n'est pas dérivable en $0 \in]-1, 1[$ et parsuite le théorème de Rolle n'est pas applicable à f sur l'intervalle $[-1, 1]$

(b) En appliquant le *T.A.F.*, à la fonction $f(t) = \ln t$, sur $[x+1, x+2]$, montrer que

$$\frac{1}{x+2} < \ln \frac{x+2}{x+1} < \frac{1}{x+1}, \ \forall x > 0.$$

Déduire la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \dfrac{x+2}{x+1}$.

Réponse: Soit $t \in [x+1, x+2]$, donc $t \geq x+1$ et donc $t > 0$, ainsi la fonction $\ln t$ est continue et dérivable et vérifie les conditions du T.A.F . sur $[x+1, x+2]$, il existe alors $c \in]x+1, x+2[$ tel que

$$\ln(x+2) - \ln(x+1) = 1.\frac{1}{c}$$

ainsi $\dfrac{1}{c} = \ln \frac{x+2}{x+1}$ or $x+1 < c < x+2$ et donc $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x+1}$ et parsuite

$$\frac{1}{x+2} < \ln \frac{x+2}{x+1} < \frac{1}{x+1}$$

Pour $x > 0$ on a

$$\frac{x}{x+2} < x \ln \frac{x+2}{x+1} < \frac{x}{x+1}$$

et par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ on trouve

$$1 \leq \lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{x+2}{x+1} \leq 1$$

et parsuite $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \dfrac{x+2}{x+1} = 1$.

---

3. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x}.$$

(a) Déterminer son dévoloppement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Réponse: On a $f(x) = \dfrac{[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon] - [1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon]}{x} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + x^2\varepsilon$

(b) Déduire $f(0)$, $f\ '(0)$ et $f''(0)$.

Réponse: le prolongement par continuite de f en 0 noté aussi par f donne:

$$f(0) = \frac{1}{2}; \ f^{'}(0) = \frac{3}{8} \ \text{et} \ \frac{f^{''}(0)}{2!} = \frac{1}{16} \ \text{et donc} \ f^{''}(0) = \frac{1}{8}$$

---

4. (a) Calculer, au moyen des développements limités donner l'équation de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ de la fonction

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \sin \frac{1}{x} \right].$$

Réponse: On a $\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{x} = [\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon] - [\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon]$$

et donc

$$f(x) = x^2[-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon$$

et donc $y = \frac{-1}{2}$ est une asymptote horisontale

(b) En donnant le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 1, trouver l'équation de la tangente (T), au point A d'abscisse $x = 1$, à la courbe (C) de la fonction

$$f(x) = xe^{x-1}$$

Réponse: Soit $t = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) = (t+1)e^t = (t+1)(1+t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon)$ et donc

$$f(x) = 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + t^2\varepsilon = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon$$

parsuite $y = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$ est la tangente à la courbe de f au point 1

(c) Déduire la position de (C) par rapport à (T).
Réponse: $f(x) - y \simeq \frac{3}{2}(x-1)^2 \geq 0$ donc la courbe est au dessus de la tangente

---

5. (a) Calculer les intégrales

$$I = \int \frac{1}{1+x^2}dx \qquad \text{et} \qquad J = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx.$$

Réponse: $I = \arctan x + c$ et pour J faisons la décomposition

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

on obtient: $a = 1, b = -1$ et $c = 0$ et donc

$$J = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

(b) Déduire les intégrales

$$K = \int \frac{x-2}{x+x^3}dx \qquad \text{et} \qquad L = \int \frac{e^t-2}{e^{2t}+1}dt.$$

Réponse:

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{x}{x(1+x^2)}dx - 2\int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= I - 2J = \arctan x - 2\ln x + \ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

---

6. Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx, n \geq 2.$$

(a) Montrer que $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

Réponse: $I_n+I_{n-2} = \int_0^1 [\frac{x^n}{x^2+1} + \frac{x^{n-2}}{x^2+1}]dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{n-2}dx = \frac{1}{n-1}x^{n-1}|_0^1 = \frac{1}{n-1}$

(b) En utilisant le théorème de la moyenne calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

(c) Réponse: x^n est continue sur $[0,1]$ pour tout $n \geq 2$ et $\dfrac{1}{x^2+1}$ est continue et positive, donc d'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$I_n = c^n \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = c^n \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{4}c^n$$

on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 < c < 1$ et parsuite $\lim_{n\to+\infty} c^n = 0$

---

7. Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) $xy' - y = 2x^2y$, avec $y(1) = e$

Réponse: $x\dfrac{dy}{dx} = 2x^2y$ et donc $\int \dfrac{dy}{y} = \int 2xdx = x^2 + c$ ainsi $\ln y = x^2 + c$ et parsuite

$$y = ke^{x^2}$$

est la solution générale de l'équation différentielle. La solution dont la courbe passe par le point $(1,e)$ vérifie: $e = ke$ et donc $k = 1$ c'est à dire $y = e^{x^2}$

(b) $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 1 \quad (1)$

Réponse: L'équation sans 2nd membre associée à (1) est $y'' + 3y' - 4y = 0 \quad (2)$ dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \quad (3)$ qui a pour racines

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4$$

la solution générale de (2) est

$$y_g = c_1e^x + c_2e^{-4x}$$

D'autre part, $f(x) = x^2 + 1 = (x^2+1)e^{0x}$,0 n'est pas une racine de (3), permet de poser $y_p = ax^2 + bx + c$ comme solution particulière de (1). Il en vient: $y_p^{'} = 2ax + b$ et $y_p^{''} = 2a$. On remplace dans (1)

$$2a + 3(2ax+b) - 4(ax^2+bx+c) = x^2 + 1$$

c'est à dire

$$-4ax^2 + (6a-4b)x + 2a + 3b - 4c = x^2 + 1$$

donc

$$\begin{cases} -4a & = & 1 \\ 6a - 4b & = & 0 \\ 2a + 3b - 4c & = & 1 \end{cases}$$

c'est à dire $a = -\frac{1}{4}, \quad b = -\frac{3}{8}$ et $c = -\frac{21}{8}$ ainsi,

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{21}{8}$$

la solution générale de (1) est $y = c_1e^x + c_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{21}{8}$

---

8. (10pts) On définit la suite récurrente (u_n) par

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \text{ avec } \ u_0 = 1.$$

(a) Montrer par récurrence que cette suite est positive, croissante et majorée par 3.

Réponse: $u_0 = 1 > 0$ on suppose que $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} > 0$ et parsuite tous les termes de cette suite sont strictement positifs. D'autre part, $u_0 = 1 < 3$, supposons que $u_n < 3$ alors $2u_n < 6$ donc $2u_n + 3 < 9$, d'où $u_{n+1} < \sqrt{9} = 3$ parsuite la suite est majorée par 3.Etudions la monotonie de (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui du numérateur: On sait que le trinôme $-X^2 + 2X + 3$ qui a pour racines $X_1 = -1$ et $X_2 = 3$ est positif sur $[0, 3]$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$ car $u_n \in]0, 3[$ et cette suite est croissante

(b) En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

Réponse: (u_n) est croissante majorée donc elle est convergente et comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(X) = \sqrt{2X + 3}$ est continue sur $[0, 3]$ alors sa limite l vérifie

$$l = f(l)$$

c'est à dire $l^2 = 2l + 3$ on obtient $l = -1$ à rejetter ou $l = 3$ à accepter.
