Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Juillet-Durée:3h00
$2^{\text{ième}}$ Session-
2011-2012

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement d
Beyrouth-Baakline-Baalbek-Ghazza-
Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Examen de Rattrapage (Solution)
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. (10*pts*) Soit la fonction $f(x)$ définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x > 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Déterminer une relation en a et b de manière que f soit continue en 1
Réponse: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ et donc $\lim_{x\to 1}\sqrt{x} = \lim_{x\to 1}(ax^2 + bx + 1)$ parsuite $a + b = 0$

(b) Déterminer a et b de manière que f soit dérivable en 1
Réponse: on a

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

comme f est dérivable en 1 alors $f'(1^-) = f'(1^+)$ et donc $2a + b = \frac{1}{2}$ comme $a + b = 0$ alors $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

---

2. (15 *pts*) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^{\tan x} - \cos x}{x}$$

(a) Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 3

Réponse: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon} = x + \dfrac{x^3}{3} + x^4\varepsilon$ et donc

$$f(x) = \frac{\exp(x + \dfrac{x^3}{3} + x^4\varepsilon) - (1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon)}{x}$$

$f(x)=\dfrac{1}{x}[1+(x+\dfrac{x^3}{3})+\frac{1}{2}(x+\dfrac{x^3}{3})^2+\frac{1}{6}(x+\dfrac{x^3}{3})^3+\frac{1}{24}(x+\dfrac{x^3}{3})^4-(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24})]+x^4\varepsilon=$ $\dfrac{1}{x}[1+(x+\dfrac{x^3}{3})+\frac{1}{2}(x^2+\frac{2}{3}x^4)+\frac{1}{6}(x^3)+\frac{1}{24}(x^4)-(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24})]+x^4\varepsilon$ parsuite

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon$$

(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Soit g le prolongement de f
Réponse: $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

(c) Définir g et montrer qu'elle est dérivable en 0. Donner $g'(0)$
Réponse:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

$g'(0)=\lim_{x\to 0}[1+x+x^2+x^2\varepsilon]=1$

(d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 et préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe de g au voisinage de 0
Réponse:$y=1+x$ de plus $g(x)-y\simeq\frac{1}{2}x^2\geq 0$ et donc la courbe est au dessus de la tangente.

(e) Donner une valeur approchée de $f(0.001)$
Réponse: $f(0.001)\simeq 1+10^{-3}+\frac{1}{2}10^{-6}=1.0010005$

---

3. (10*pts*) Soit $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt{x^2+c}$ où c est une constante.

En utilisant le D.L., trouver l'équation de l'asymptote à la courbe de f au voisiniage de $+\infty$. Trouver les valeurs de c pourlesquelles la courbe est au dessus de l'asymptote

Réponse: $f(x)=\sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\dfrac{c}{x^2})}=x(1+\dfrac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}+x(1+\dfrac{c}{x^2})^{\frac{1}{2}}=x[1+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon]+x[1+\frac{1}{2}\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\varepsilon]=2x+\frac{2+3c}{6}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon$ et donc $y=2x$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$. On a $f(x)-y\simeq\frac{2+3c}{6}\frac{1}{x}>0$ si $2+3c>0$ et donc $c>\frac{-2}{3}$.

---

4. (10 *pts*)

(a) Donner la décomposition en éléments simples de $g(t)=\dfrac{1}{t^2(t+1)}$ et puis déduire celle de $f(x)=\dfrac{1}{x^4(x^2+1)}$
Réponse: $\dfrac{1}{t^2(t+1)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t^2}+\dfrac{c}{t+1}$ avec $b=1,\ c=1,\ a+b+\frac{c}{2}=\frac{1}{2}$ et donc $a=-1$.

$$g(t) = \frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1}$$
$$f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2+1}$$

(b) Calculer $I = \int f(x)dx$ et déduire $J = \int (\frac{1+\cos x}{\sin x})^4 dx$

Réponse: $I = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^3} + \arctan x + c$. Pour J, on pose $t = \tan\frac{x}{2}$, donc $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et ainsi $J = 2\int \frac{dt}{t^4(1+t^2)} = 2[\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - \frac{3}{(\tan\frac{x}{2})^3} + \frac{x}{2}] + c$

---

5. ($10pts$) Calculer les intégrales suivantes:

(a) $I = \displaystyle\int \frac{(1+\cos x)\sin x}{4+\cos^2 x}dx$

Réponse: $I = \int \dfrac{\sin x}{4+\cos^2 x}dx + \int \dfrac{\cos x \sin x}{4+\cos^2 x}dx = -\int \dfrac{dt}{4+t^2} + \frac{1}{2}\int \dfrac{d(4+\cos^2 x)}{4+\cos^2 x}$

où $t = \cos x$ dans la première partie. ainsi, $I = -\frac{1}{4}\displaystyle\int \frac{2d(\frac{t}{2})}{1+(\frac{t}{2})^2} + \frac{1}{2}\ln(4+\cos^2 x) =$

$-\frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\ln(4+\cos^2 x) + c = -\frac{1}{2}\arctan\cos x + \frac{1}{2}\ln(4+\cos^2 x) + c$

(b) $K = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Réponse:$K = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{1+(x+1)^2}} = \arg\sinh(x+1) + c$

---

6. ($15\,pts$) Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx$

(a) En utilisant le théorème de la moyenne montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que

$$I = (\frac{1}{1-c})(1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$$

Réponse: on a $x \in [0, \frac{1}{2}]$, donc $\frac{1}{1-x}$ est continue, de plus e^{-x} est continue et positive alors d'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in]0, \frac{1}{2}[$

$$I = \frac{1}{1-c}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}dx = \frac{-1}{1-c}e^{-x}|_0^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{1-c})(1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$$

(b) Déterminer le sens de variation de $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, en déduire que $(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) \leq I \leq 2(1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

Réponse: $f'(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} > 0$ et f est croissante, comme $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ donc $f(0) \leq f(c) \leq f(\frac{1}{2})$ et parsuite $(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) \leq I \leq 2(1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

---

7. $(15pts)$ Soit la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}, \quad x_0 = \frac{1}{4}$.

(a) Montrer que $x_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n

Réponse: On a $x_0 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ supposon que $x_n \leq \frac{1}{2}$, il en vient que $x_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Noter que cette suite est à termes positifs et donc lorsque $x_n \leq \frac{1}{2}$ on peut en déduire que $x_n^2 \leq \frac{1}{4}$.

(b) Montrer que (x_n) est monotône

Réponse: $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = (x_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0$. et parsuite (x_n) est croissante

(c) Déduire que (x_n) est convergente et trouver sa limite

Réponse: On a (x_n) est croissante et majorée donc elle est convergente. D'autre part, $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ est continue alors si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ alors $l = f(l)$ et donc $(l - \frac{1}{2})^2 = 0$, parsuite $l = \frac{1}{2}$

---

8. $(15pts)$

(a) Résoudre l'équation différentiel $z^{'} - \dfrac{1}{x}z = \ln x$

Réponse: c'est une équation linéaire de première ordre, on considère l'équation sans second membre qui lui est associée $z^{'} - \dfrac{1}{x}z = 0 \quad (S)$ et donc

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

parsuite la solution générale de (S) est $z = cx, \quad c \in \mathbb{R}$. On suppose alors que la solution générale de l'équation initiale est de la forme $z = f(x).x$ où $f(x)$ est une fonction différentiable. On a $z^{'} = f^{'}(x).x + f(x)$. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve

$$f^{'}(x).x = \ln x$$

$f(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + c$ et donc $z = (\dfrac{(\ln x)^2}{2} + c)x$ est la solution générale

(b) Déduire les solutions de $2yy^{'} - \dfrac{1}{x}y^2 = \ln x \quad (*)$

Réponse: Posons $z = y^2$ et donc $z^{'} = 2yy^{'}$ et en remplaçant dans $(*)$ on obtient $z^{'} - \frac{1}{x}z = \ln x$ et donc d'après $a)$ la solution générale de $(*)$ est

$$y^2 = (\frac{(\ln x)^2}{2} + c)x$$

(c) Résoudre l'équation différentielle $y^{''} - 3y^{'} + 2y = \sin^2 x \quad (1)$

Réponse: soit l'équation sans 2nd membre associée à (1) :

$$y^{''} - 3y^{'} + 2y = 0 \quad (2)$$

dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (3)$ dont les racines sont $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$ et la solution générale de (2) est

$$y_G = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Soit $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$. une solution particulière de (1), $y_p = y_1 + y_2$ où y_1 et y_2 sont respectivement deux solutions particulières des équations

$$\begin{cases} y^{''} - 3y^{'} + 2y &= \frac{1}{2} \quad (4) \\ y^{''} - 3y^{'} + 2y &= -\frac{\cos 2x}{2} \quad (5) \end{cases}$$

Posons $y_1 = a$ on obtient $y_1 = \frac{1}{4}$
Posons $y_2 = a\cos 2x + b\sin 2x$ et donc $y^{'} = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$ et $y^{''} = -4y$ et on met dans (5)

$$\begin{aligned} -2y - 3y^{'} &= -\frac{\cos 2x}{2} \\ (-2a - 6b)\cos 2x + (-2b + 6a)\sin 2x &= -\frac{\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

il en vient

$$\begin{cases} -2a - 6b &= -\frac{1}{2} \\ -2b + 6a &= 0 \end{cases}$$

et $y_2 = \frac{1}{40}\cos 2x + \frac{3}{40}\sin 2x$ et $y_p = \frac{1}{4} + \frac{1}{40}\cos 2x + \frac{3}{40}\sin 2x$ et la solution générale de (1) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40}\cos 2x + \frac{3}{40}\sin 2x$$

Bon travail