Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Septembre-Durée:3h00
$1^{\text{ière}}$ session- (Exceptionnel)
2009-2010

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth-Baakline-Tyr-Baalbek-Ghazza-Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Examen Final (Solution)
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. $(10pts)$

(a) Soit la fonction réelle

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Vérifier que f est dérivable au point 1 $(2\ pts)$ et donner l'équation de la tangente à la courbe de f en ce point $(2\ pts)$

Réponse: On a

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 1 \text{ ou } \leq -1 \end{cases}$$

donc

$$f^{'}(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \text{ ou } < -1 \end{cases}$$

$f^{'}(1^-) = \lim_{x \to 1^-} [\frac{-2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}}] \sim \infty \times 0 = \lim_{x \to 1^-} [e^{\frac{1}{x^2-1}}] = 0$ car $e^{\frac{1}{x^2-1}}$ est le terme dominant. Aussi, $f^{'}(1^+) = 0 = f^{'}(1^-)$ et parsuite f est dérivable en 1 et sa dérivée est $f^{'}(1) = 0$.
La tangente en ce point à la courbe de f est

$$(T) : y - f(1) = f^{'}(1)(x-1) \text{ donc } y = 0$$

(b) $(1.5pt) \times 4$: Calculer la derivée de chacune des fonctions suivantes:

i) $\ln \sqrt{\frac{\sin x}{1-\cos x}}$ ii) $th(\cos x)$
iii) $argth(e^{2x})$ iv) $\tan(\sqrt{x^2-1})$

Réponse: i) Soit $u(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$ alos $u^{'}(x) = \dfrac{\cos x(1-\cos x) - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{1}{(\cos x - 1)}$
il en vient que la dérivée de $f(x) = \frac{1}{2} \ln u(x)$ est

$$f^{'}(x) = \frac{1}{2} \frac{1/(\cos x - 1)}{\sin x/(1-\cos x)} = -\frac{1}{2 \sin x}$$

ii) $f^{'}(x) = -\sin x(1 - th^2 \cos x)$

iii) $f^{'}(x) = \dfrac{2e^{2x}}{1-e^{4x}}$

iv) $f^{'}(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}(1 + \tan^2(\sqrt{x^2-1}))$

2. (10 *pts*) On considère la fonction $f(x) = (\dfrac{x}{\sin x})^{(\dfrac{1}{1-\cos x})}$. Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, pour cela on propose de calculer d'abord $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ où $g(x) = \ln f(x)$:

(a) (3*pts*) Vérifier que le développement limité de $\dfrac{x}{\sin x}$ en 0 à l'ordre 2 est donné par

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)$$

Réponse: $\frac{x}{\sin x} = \dfrac{x}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon} = \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)$ d'après la division dans l'ordre croissant

(b) (3*pts*) Déduire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(\dfrac{x}{\sin x})$

Réponse: $\ln(\dfrac{x}{\sin x}) = \ln[1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)] = \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)$

(c) (2*pts* + 1*pt*)Déduire le développement limité en 0 à l'ordre 0 de $g(x)$ et donner $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

Réponse: $g(x) = \frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{1 - [1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon]} \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x) = \dfrac{\frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon} = \frac{1}{3} + \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{3}$.

(d) (1*pt*)Déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Réponse: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^{1/3}$.

---

3. (10 *pts*) Soit $f(x) = \ln(\dfrac{\ln x}{x-1})$

(a) (1*pts*)Quel est le domaine de définition de $f(x)$

Réponse: les conditions de définition de f sont: $x > 0$, $x \neq 1$ et $\frac{\ln x}{x-1} > 0$ d'où $x > 1$ et $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

(b) (*DL* de $\frac{\ln x}{x-1}$: 2*pts*; *DL* de $f(x)$: 2*pts*) Montrer que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 1 est donné par

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{24}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x)$$

Réponse: $t = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\ln x = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^4\varepsilon$$

et donc

$$f(x) = \ln[\frac{\ln(1+t)}{t}] = \ln[1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + t^3\varepsilon]$$

on obtient: $f(x) = (-\dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{3} - \dfrac{t^3}{4}) - \frac{1}{2}(\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t^3}{3}) + \frac{1}{3}(\dfrac{-t^3}{8}) + t^3\varepsilon$. D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{t}{2} + \frac{5}{24}t^2 - \frac{1}{8}t^3 + t^3\varepsilon \\ &= -\frac{(x-1)}{2} + \frac{5}{24}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon \end{aligned}$$

(c) $(1+1\ pt)$Déduire que f est prolongeable par continuité en 1 et donner son prolongement g

Réponse: $\lim_{x\longrightarrow 1} f(x)=0$ donc f est prolongeable par continuité en 1 et son prolongement

$$g(x)=\begin{cases} \ln(\dfrac{\ln x}{x-1}) & si \quad x\neq 1\\ 0 & si \quad x=1\end{cases}$$

(d) $(1+1\ pt)$Déduire l'équation de la tangente à la courbe de $g(x)$ au point 1 et préciser sa position par rapport à la courbe

Réponse: $(T)\ :\ y=-\dfrac{(x-1)}{2}$ est la tangente à la courbe de f au point 1, on a $f(x)-y\simeq \frac{5}{24}(x-1)^2>0$ et donc la courbe est au dessus de la tangente

(e) $(1pt)$ Déduire une valeur approchée de $f(\dfrac{e}{2})=\ln(2\frac{1-\ln 2}{e-2})$ où $e\simeq 2.718$

Réponse: On remplace $x=\frac{e}{2}$ par sa valeur de la partie régulière du D.L on trouve $f(\frac{e}{2})\simeq -\frac{0.359}{2}+\frac{5}{24}0.359^2-\frac{1}{8}0.359^3=$

---

4. $(15pts)$

(a) $(5pts)$En intégrant par parties, montrer que

$$\int_a^b x\ f^{''}(x)dx=[bf^{'}(b)-f(b)]-[af^{'}(a)-f(a)]$$

Réponse: $u=x$ donc $du=dx$; $dv=f^{''}(x)dx$ donc $v=f^{'}(x)$.

$$\begin{aligned} I &= x.f^{'}(x)|_a^b-\int_a^b f^{'}(x)dx=x.f^{'}(x)|_a^b-f(x)|_a^b\\ &= [bf^{'}(b)-f(b)]-[af^{'}(a)-f(a)]\end{aligned}$$

(b) $(2pts{+}3pt)$ Calculer la dérivée seconde de $\ln(1+x)$ et déduire de a) la valeur de $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx$

Réponse: $f(x)=\ln(1+x)$ donc $f^{'}(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et $f^{''}(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et donc $I=-\int_0^1 x.f^{''}(x)dx$ et d'après $a)$ on a

$$\begin{aligned} I &= [0.f^{'}(0)-f(0)]-[1.f^{'}(1)-f(1)]\\ &= -(\frac{1}{2}-\ln 2)\end{aligned}$$

(c) $(5pts)$ Trouver la valeur de I par calcul direct

Réponse: $\dfrac{x}{(1+x)^2}=\dfrac{x+1-1}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{(1+x)}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et donc

$$I=\ln(1+x)|_0^1+\frac{1}{1+x}|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}$$

---

5. $(15pts)$ Calculer :

(a) $(5pts)$ $\displaystyle\int\frac{dx}{shx+2chx}$

Réponse: $I=\int\dfrac{dx}{e^x+\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})}=\int\dfrac{e^xdx}{\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\displaystyle\int\frac{d(\sqrt{3}e^x)}{1+(\sqrt{3}e^x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x)+c$

(b) $(5pts)$ $\displaystyle\int\frac{shx}{1+ch2x}dx$

Réponse: $I=\int\dfrac{d(chx)}{1+1+2ch^2x}=\frac{1}{2}\displaystyle\int\frac{dchx}{1+ch^2x}=\frac{1}{2}\arctan chx+c$

(c) (5pts) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\tan x}$

Réponse: On pose $t = \tan x$ et donc $dt = (1+t^2)dx$

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+t} = \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

Décomposons $f(t)$ en fractions simples

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

on obtient:

$$a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2},\ \ c = \frac{1}{2}$$

et

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{-t+1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t) - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\arctan t + c$$

---

6. (20 pts) Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) (10pts : 3pts pour l'éqtion sans 2nd membre; 5pts pr la solution particulière; 2pts conditions initiales) $y^{''} - 2y^{'} + y = xe^{-x}$, (1) avec $y(0) = 0$ et $y^{'}(0) = 0$

Réponse: l'équation sans second membre associée à (1) est

$$y^{''} - 2y^{'} + y = 0 \quad (2)$$

dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ c'est à dire $(\lambda - 1)^2 = 0$ et $\lambda = 1$ est une racine double. La S.G. de (2) est

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Le second membre de (1) est $f(x) = xe^{-x}$ de la forme $P(x).e^{\alpha x}$ où $\alpha = -1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, posons donc

$$y_p = (ax+b)e^{-x}$$

comme solution particulière de (1). On obtient:

$$\begin{aligned} y_p^{'} &= -(ax+b)e^{-x} + ae^{-x} \\ y_p^{''} &= (ax+b)e^{-x} - 2ae^{-x} = y_p - 2ae^{-x} \end{aligned}$$

Remplaçons dans (1)

$$\begin{aligned} 2y_p - 2ae^{-x} + 2(ax+b)e^{-x} - 2ae^{-x} &= xe^{-x} \\ 4y_p - 4ae^{-x} &= xe^{-x} \\ (4ax + 4b - 4a)e^{-x} &= xe^{-x} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases} 4a &= 1 \\ 4b - 4a &= 0 \end{cases}$$

donc $a = b = \frac{1}{4}$ et $y_p = \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$. La SG de (1) est

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}.$$

D'autre part,

$$y^{'} = c_1 + c_2(e^x + xe^x) - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x}$$

Les conditions $y(0) = 0$ et $y^{'}(0) = 0$ donnent

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} & = & 0 \\ c_1 + c_2 & = & 0 \end{cases}$$

et donc $c_1 = -\frac{1}{4}$ et $c_2 = \frac{1}{4}$, parsuite

$$y = \frac{1}{4}(-1+x)e^x + \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$$

(b) (10*pts* : 4*pts* pour l'éqtion sans 2nd membre; 6*pts* pr la solution finale) $y^{'} - (2x-1)y = e^{x^2}$

---

7. (20pts) Considérons les deux suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ w_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!} = b + \frac{a+b}{1} + \frac{2a+b}{2!} + \cdots + \frac{na+b}{n!} \end{aligned}$$

(a) (4*pts*) Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n et déduire que (u_n) est croissante

Réponse: $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$. On en déduit que:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

et donc (u_n) est croissante

(b) (4*pts*) Montrer par récurrence que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k \geq 1$

Réponse: $k = 1$: $\frac{1}{1} = 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1$, on suppose que la propriété est vraie à l'ordre $k = n$ c'est à dire $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Montrons qu'elle le restera pour$k = n+1$. En effet,

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{2^{n-1} + n.2^{n-1}}$$

or pour $n > 1$ on a $n \geq 2$ donc $n.2^{n-1} \geq 2^n$ et parsuite

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n-1} + 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

et ainsi la propriété est toujours vraie.

(c) (4*pts*) Vérifier que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$

Réponse: le premier memebre est la somme d'une n termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1.\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$$

(d) (4*pts*) Déduire de b) et c) que (u_n) est majorée par 3

Réponse: On a $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2(1 - \frac{1}{2^n})$ et donc

$$u_n \leq 1 + 2 = 3$$

(e) (4*pts* : $3+1$) La suite (u_n) étant croissante et majorée elle est donc convergente, on admet que sa limite est $\lim_{n\to\infty} u_n = e$ (exponentielle de 1). Vérifier que $w_n = bu_n + au_{n-1}$ et trouver la limite de (w_n)

Réponse: On a (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente, sa limite est $\lim_{n\to\infty} u_n = e$. D'autre part

$$\begin{aligned}
bu_n + au_{n-1} &= b\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + a\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \\
&= b(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}) + a(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}) \\
&= b+(a+b)+\frac{a+b}{2!}+\cdots+\frac{a+b}{(n-1)!}+\frac{b}{n!} \\
&= b+\frac{a+b}{1}+\frac{2a+b}{2!}+\cdots+\frac{na+b}{n!} = w_n
\end{aligned}$$

et parsuite $\lim w_n = (a+b)e$
