1. (a) Trouver x, y , z et t dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} 3x+y & x-3y \\ 4z-2t & z+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA
2. Peut-on trouver une matrice réelle X telle que $AX = B$?
3. Peut-on trouver une matrice réelle Y telle que $YA = B$? .

---

2. Soient les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer si possible:

$(A+E).F$; $\qquad C.B +^t E.^t A.F$

(a) Trouver deux matrices réelles A et B telles $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $AB = 0$

(b) Montrer que pour tout $A \in M_n(IK)$, on a :

1. $\frac{1}{2}(A +^t A)$ est symétrique
2. $\frac{1}{2}(A -^t A)$ est antisymétrique

(c) En déduire que $\forall A \in M_n(IK)$, il existe une matrice symétrique B et une matrice antisymétrique C telles que $A = B + C$.

(d) Soit A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver B et C

---

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que $J^2 - J - 2I_3 = (0)$

(b) Déduire J^{-1}

(c) Retrouver J^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan

---

4. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que $(M - I)(M + 3I) = (0)$

(b) Montrer que M est inversible et trouver M^{-1}

(c) Trouver M^2 en fonction de M et de I

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = a_n M + b_n I$. En déduire M^3

---

5. Calculer

$$A^n = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}^n, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \text{ où } n \in IN$$

---

6. Calculer l'inverse de la matrice suivante, d'abord par la méthode de Gauss Jordan ensuite par la méthode des cofateurs

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

---

7. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Utiliser l'élimination de Gauss pour transformer cette matrice en une matrice triangulaire supérieure, en déduire $|A|$

---

8. Pour quelles valeurs de $a \in IR$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \in M_3(IR)$ est-elle inversibe? Trouver das ce cas son inverse.
