1. Soit la courbe paramétrique
$$(C) : \begin{cases} x(t) & = & a\cos^3 t \\ y(t) & = & a\sin^3 t \end{cases}$$
   (a) Vérifier que $\overrightarrow{F(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ est une fonction periodique et déterminer sa période
   (b) Montrer que pour construire entièrement la courbe (C), il suffit d'étudier (C) pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et completer sa construction en utilisant trois symétries que l'on doit préciser.
   (c) Montrer que le point $M(0) = (a, 0)$ est un point singulier de (C) dont on doit préciser la nature, et déduire par symétrie les trois autres points singuliers de (C)
   (d) Donner l'équation de la tangente à (C) au point $t = \frac{\pi}{4}$
   (e) Etudier la variation et construire la courbe (C)

---

2. Démontrer que la courbe paramétrée $t \longrightarrow (2t - \dfrac{1}{t^2}, 2t + t^2)$ possède un point double dont on donnera les coordonnées.

---

3. Soit $f(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ une courbe paramétrée de classe C^1, dont tous les points sont réguliers et ne passant pas par l'origine. Soit t_0 tel que la longueur $OM(t_0)$ soit minimale. Prouver que $\overrightarrow{OM(t_0)}$ est orthogonale à la tangente à la courbe en $M(t_0)$

---

4. Déterminer les points d'infléxion de l'arc paramétré $t \longrightarrow ((t-2)^3, t^2 - 4)$

---

5. Déterminer la nature du point $P(0, 0)$ appartenant à chacune des courbes suivantes:
   (a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
   (b) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
   (c) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

---

6. On considère la courbe (Γ) définie par les équations paramétriques suivantes:
$$\begin{cases} x & = & t^3 + 4t^2 + t \\ y & = & t^2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
   Déterminer les équations de la tangente et de la normale à la courbe (Γ) au point $M(1)$. Quelle est l'équation de la tangente à (Γ) au point $M(-2)$?

---

7. Réduire le domaine d'étude, étudier et construire les courbes, définies par:
   (a) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2+1} \\ y = \frac{t^3}{t^2+1} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y = t + \dfrac{1}{t} \end{cases} \quad t > 0$

---

8. Construire les courbes données en coordonnées polaires:

   (a) $r = 1 + \cos\theta$

   (b) $r = \dfrac{1 + \cos\theta}{\sin^2\theta}$

   (c) $r = \dfrac{1}{\theta}$

   (d) $r = \sin 2\theta$

   (e) $r = \sqrt{\cos 2\theta}$

   (f) $r = \tan(\frac{2\theta}{3})$

   (g) $r = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta + 1}$

Application:

9. Evaluer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$$

où (AB) est l'arc parabolique $y = x^2$ liant $A(1,1)$ à $B(2,4)$.

Cette intégrale dépend - t - elle du chemin?

---

10. Evaluer les intégrales suivantes:

   (a) $I = \int_C x^2dy + y^2dx$ $\quad (C)$ étant la courbe: $x^2 + 4y^2 - 4x = 4, \quad y > 0$

   (b) $I = \int_C ydx + (x + y)dy$ $\quad (C)$ étant la courbe :$y = x^2 + 2x$ de $O(0,0)$ à $B(2,8)$

---

11. Calculer la longueur du cycloïde homogène:

$$(C) : \begin{cases} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$
