Université Libanaise **ISAE - Cnam Liban** **Centre du Liban associé au Cnam Paris**	**Date :** ***Vendredi 24 Mai 2013*** **Durée :** *2H* **De** *17H* **à** *19H*	**Semestre :** *2ième* **Année :** *2013*
Code UE : ***MVA 006*** **Intitule de l'UE :** ***Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.***		**Ce sujet comporte :** *2 pages*

Type d'examen :	Semestriel	☒Partiel	€ Final	€ Rattrapage	
	Annuel	€ E1	€ E'1	€ E2	€ E'2

Documents autorisés : € Tous ☒ Aucun € Autre (A préciser : ....)

Consignes particulières : *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Calculatrice: € Aucune € Programmable ☒ Non programmable

Centres concernés	☒ **Beyrouth**	☒ **Baakline**	☒ **Baalbeck**	☒ **Nahr Ibrahim**
	☒ **Bickfaya**	☒ **Ghazza**	☒ **Tripoli**	

Exercice 1: (4 points)

Soit la fonction f de deux variables réelles définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^m} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

où m est un paramètre réel.

1-Etudier, suivant les valeurs du paramètre m, la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2-On posera dans cette question $m=1$.

a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y)\neq(0,0)$.

b) Peut-on dire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

c) Soient Γ la courbe de niveau d'équation $f(x,y)=\frac{1}{2}$ et Δ la droite d'équation $y=x$.
On appelle D le domaine du premier quadrant, limité par Γ et Δ. Calculer alors l'aire de D.

Exercice 2: (4 points)

Considérons la fonction f de deux variables réelles définie par : $f(x,y)=\cos(x-y)+\ln(x+y)$.

1-Déterminer et dessiner le domaine de définition D de f, puis expliquer pourquoi f est de classe C^∞ sur D.

2-Montrer que pour tout $(x,y)\in$ D, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$.

3-Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2, au point $(1,1)$.

4-Donner la différentielle df de f en un point (x,y) de D.

5-Donner une équation du plan tangent à la surface de f au point de coordonnées $(1,1,\ \ln(2)+1)$.

6-La limite suivante $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{f(x,y)-1-\ln(2)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ existe-t-elle ? Pourquoi ?

Exercice 3: (4 points)
Soit f la fonction des deux variables réelles x et y définie par:

$$f(x,y) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 + y^2 - 2xy - 24x + 10.$$

1- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En résolvant alors le système correspondant aux conditions nécessaires du 1^{er} ordre, trouver les points candidats à un extrémum pour f.
2- Calculer les dérivées partielles secondes de f. A l'aide des conditions suffisantes du $2^{ième}$ ordre, déterminer la nature des points trouvés à la question précédente.
3- Pour chaque extrémum trouvé, préciser s'il est global ou pas.

Exercice 4: (8 points)
Calculer les intégrales doubles suivantes:

a) $I = \iint_D e^{-x^2}\,dxdy$ où $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 1,\quad y \le x \le 1 \}$

b) $J = \iint_D \sin(x^2+y^2)\,dxdy$ où $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{\pi}{4} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2},\quad |y| \le x \}$

c) $K = \iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dxdy$ où $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1,\quad 0 \le x \}$

d) $L = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ où $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 9,\quad x^2+y^2-2x \ge 0 \}$

e) $M = \iint_D y\,dxdy$ où $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y+x < 1,\quad -1 < y-x < 1 \}$

f) $N = \iint_D dxdy$ où D est le domaine du premier quadrant limité par les courbes d'équations

$$y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{2}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2x}.$$

Indication : On pourra éventuellement poser : $x = \frac{u}{v}$ *et* $y = uv$

Correction PARTIEL-MVA 006 - Mai 2013

Exercice 1 :

1) ■ Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$: les fonctions $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto (x^2+y^2)^m$ sont continues et de plus $(x^2+y^2)^m$ ne s'annule pas $\forall m$.

Donc pour tout $m \in \mathbb{R}$ f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

■ Que se passe-t-il en $(0,0)$?

- $f(0,0) = 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{(x^2+y^2)^m}$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{(r^2)^m} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^{1-2m} \cdot \cos\theta$$

Cette limite existe SSi $1-2m > 0$, càd $m < \frac{1}{2}$

Dans ce cas elle vaut $0 = f(0,0)$

Donc f sera continue en $(0,0)$ ssi $m < 1/2$.

En conclusion, si $m < 1/2$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et si $m \geq 1/2$ alors f sera continue seulement sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et pas en $(0,0)$

---

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

- $f'_x(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
- $f'_y(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

---

b) $m = 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow f$ n'est pas continue en $(0,0)$ (d'après ①)

$\Rightarrow f$ n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

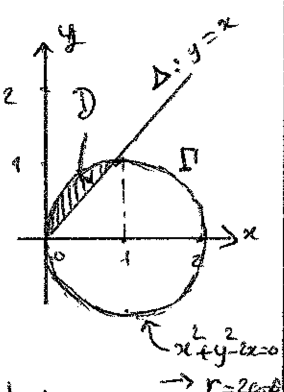
---

c) ■ $f(x,y) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 2x$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

Donc Γ est le cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 1



■ L'aire de D est $\mathcal{A} = \iint_D dx\,dy$

Passons aux coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} r\,dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$= \pi/4 - \frac{1}{2}$ unités d'aire

Autre méthode :

(Méthode géométrique)

$$\mathcal{A} = \frac{\text{aire du disque} - \text{aire du carré}}{4}$$

$$= \frac{\pi \times 1^2 - (\sqrt{2})^2}{4}$$

$$= \frac{\pi - 2}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad u.a.$$

Exercice 2 :

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$
= demi-plan ouvert situé au dessus de la droite d'éq. $y=-x$

La fonction $(x,y) \mapsto \cos(x-y)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{D}$.

Sur $\mathcal{D}$, la fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est de classe C^∞ et de plus $x+y>0$; donc la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x+y)$ est de classe C^∞.

$\Rightarrow f$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{D}$

---

2) a) $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$

- $f'_x(x,y) = -\sin(x-y) + \frac{1}{x+y}$
- $f'_y(x,y) = \sin(x-y) + \frac{1}{x+y}$
- $f''_{xx}(x,y) = -\cos(x-y) - \frac{1}{(x+y)^2}$
- $f''_{yy}(x,y) = -\cos(x-y) - \frac{1}{(x+y)^2}$

$$\Rightarrow f''_{xx}(x,y) - f''_{yy}(x,y) = 0$$

(CQFD)

3) $f''_{xy}(x,y) = \cos(x-y) - \frac{1}{(x+y)^2}$

Ainsi
$$\begin{cases} \bullet\ f(1,1) = \cos 0 + \ln 2 = 1 + \ln 2 \\ \bullet\ f'_x(1,1) = \frac{1}{2} \\ \bullet\ f'_y(1,1) = \frac{1}{2} \\ \bullet\ f''_{xx}(1,1) = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} \\ \bullet\ f''_{yy}(1,1) = -\frac{5}{4} \\ \bullet\ f''_{xy}(1,1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Le Développement de Taylor de f en $(1,1)$ à l'ordre 2 est donné par :

$$f(1+h, 1+k) = f(1,1) + h f'_x(1,1) + k f'_y(1,1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{xx}(1,1) + 2hk f''_{xy}(1,1) + k^2 f''_{yy}(1,1)\right]$$
$$+ (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$

$$= 1 + \ln 2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k$$
$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{5}{4}h^2 + \frac{3}{2}hk - \frac{5}{4}k^2\right] + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$

---

4) La différentielle de f en un point (x,y) est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$$
$$= \left(-\sin(x-y) + \frac{1}{x+y}\right)dx$$
$$+ \left(\sin(x-y) + \frac{1}{x+y}\right)dy$$

---

5) Le début du développement de Taylor donne l'équation du plan tangent à la surface de f en $(1,1,1+\ln 2)$

Donc cette équation sera donnée par

$$z = 1 + \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$
$$= \underline{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \ln 2}$$

6) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y) - 1 - \ln 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\left[-\frac{5}{4}h^2 + \frac{3}{2}hk - \frac{5}{4}k^2\right]}{h^2+k^2} + \varepsilon(h,k)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } k=0 \text{ et } h \to 0^+ \\ -\infty & \text{si } k=0 \text{ et } h \to 0^- \end{cases}$$

<u>Donc cette limite n'existe pas.</u>

<u>Exercice 3 :</u>

1) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $f'_x(x,y) = 4x^3 - 24x^2 + 46x - 2y - 24$
- $f'_y(x,y) = 2y - 2x$

<u>Conditions du 1er ordre :</u>

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 12x^2 + 23x - y - 12 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0 \quad (1) \\ y = x \end{cases}$$

* Le polynôme (1) admet 1 comme racine évidente. Il est donc divisible par $x - 1$

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 & x - 1 \\ \ominus & 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 10x + 12 \\ \hline & -10x^2 + 22x - 12 & \\ \ominus & -10x^2 + 10x & \\ \hline & 12x - 12 & \\ \ominus & 12x - 12 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

* Le polynôme $2x^2 - 10x + 12$ a un discriminant réduit $\Delta' = 25 - 24 = 1$. Il admet donc 2 racines distinctes qui sont $\frac{5-1}{2} = 2$ et $\frac{5+1}{2} = 3$

Finalement les conditions du 1er ordre donnent :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

<u>Donc f a trois points critiques $A(1,1)$; $B(2,2)$; $C(3,3)$ où elle peut admettre des extrémums.</u>

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $f''_{xx}(x,y) = 12x^2 - 48x + 46$
- $f''_{yy}(x,y) = 2$
- $f''_{xy}(x,y) = -2$

$$D(x,y) = [f''_{xy}(x,y)]^2 - [f''_{xx}(x,y)][f''_{yy}(x,y)]$$
$$= [-2]^2 - [12x^2 - 48x + 46][2]$$
$$= -24x^2 + 96x - 88$$

<u>en $A(1,1)$:</u>

$$\begin{cases} D(1,1) = -24 + 96 - 88 = -16 < 0 \\ f''_{xx}(1,1) = 10 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f admet un minimum local en $A(1,1)$, de valeur $f(1,1) = 1$

en $B(2,2)$:

$D(2,2) = -24\times 4 + 96\times 2 - 8 = 8 > 0$

$\Rightarrow$ f admet en $B(2,2)$ un point de selle (Col)

en $C(3,3)$:

$$\begin{cases} D(3,3) = -24\times 9 + 96\times 3 - 88 = -16 < 0 \\ f''_{xx}(3,3) = 10 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f admet en $C(3,3)$ un minimum local de valeur 1

En conclusion, f admet un seul ~~ex~~ extrémum local, qui est un minimum local, atteint aux points $A(1,1)$ et $C(3,3)$.
Ce minimum est égal à 1.

3) Etudions le signe de

$$\Delta f = f(x,y) - f(1,1) = f(x,y) - 1$$
$$= x^4 - 8x^3 + 23x^2 + y^2 - 2xy - 24x + 9$$
$$= x^4 - 8x^3 + 23x^2 + (y-x)^2 - x^2 - 24x + 9$$
$$= \underbrace{x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9}_{P(x)} + (y-x)^2$$

* On constate que $P(x)$ admet 1 pour racine évidente :

$$\begin{array}{rl|l} & x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 & x-1 \\ \ominus & x^4 - x^3 & \overline{x^3 - 7x^2 + 15x - 9} \\ \hline & -7x^3 + 22x^2 - 24x + 9 & \\ \ominus & -7x^3 + 7x^2 & \\ \hline & 15x^2 - 24x + 9 & \\ \ominus & 15x^2 - 15x & \\ \hline & -9x + 9 & \\ \ominus & -9x + 9 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

* De même on constate que $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ est aussi divisible par $x - 1$.

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - 7x^2 + 15x - 9 & x-1 \\ \ominus & x^3 - x^2 & \overline{x^2 - 6x + 9} \\ \hline & -6x^2 + 15x - 9 & \\ \ominus & -6x^2 + 6x & \\ \hline & 9x - 9 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x-1)^2(x^2 - 6x + 9)$
$= (x-1)^2(x-3)^2$

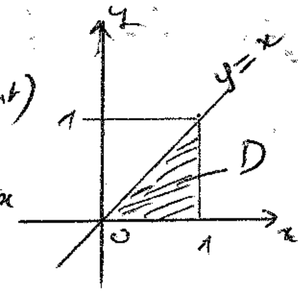
$\Rightarrow \Delta f = (x-1)^2(x-3)^2 + (y-x)^2 \geq 0$

$\Rightarrow f(x,y) - f(1,1) \geq 0$

En conclusion, le minimum 1 est un minimum global de f, atteint en $A(1,1)$ et $C(3,3)$.

Exercice 4

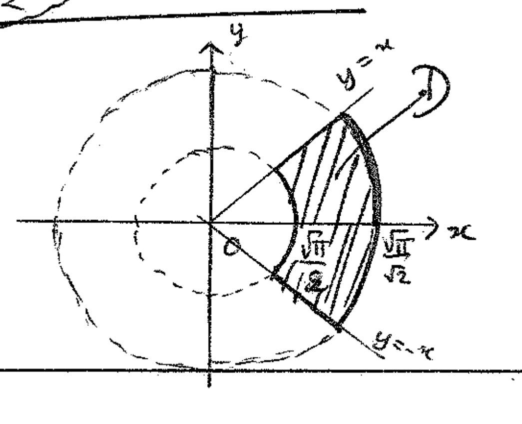
a) (coupe à x constant)



$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\left(\int_0^x dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)e^{-x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$$
$$= \frac{1 - e^{-1}}{2}$$

b)

$|y| \leq x$
$\Leftrightarrow -x \leq y \leq x$



Passons aux coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$J = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} \sin r^2 \cdot r\,dr\right)d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}\cdot \sin r^2 (2r)\cdot dr$$

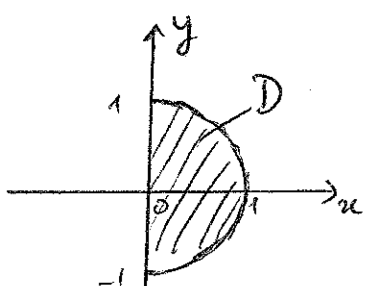
$$= -\frac{\pi}{4}\left[\cos r^2\right]_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

c) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \frac{r\cos\theta}{1+r^2}\, r\,dr\right)d\theta$$

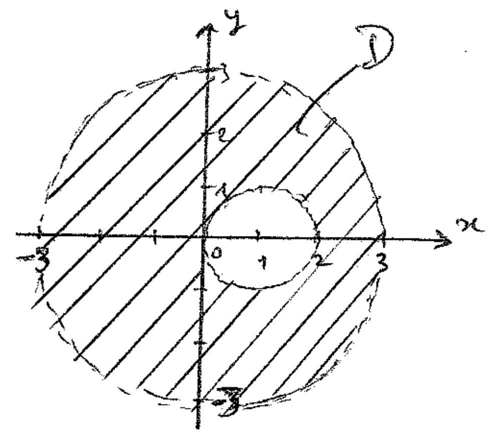
$$= \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{r^2}{r^2+1}dr\right)$$

$$= \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{r^2+1-1}{r^2+1}dr$$

$$= 2\cdot\left(\int_0^1 dr - \int_0^1\frac{dr}{r^2+1}\right)$$

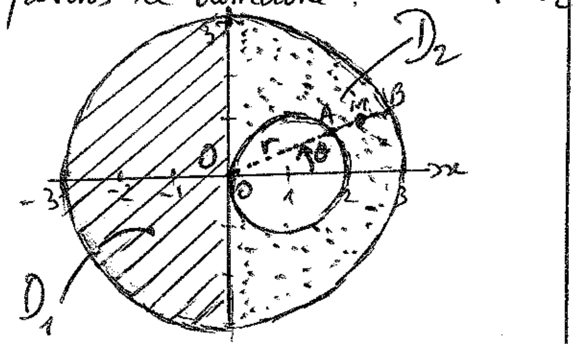
$$= 2\left[1 - \text{Arctan}\,1\right] = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

d)



- $x^2+y^2 \leq 9 \longrightarrow$ intérieur au cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3
- $x^2+y^2-2x \geq 0 \iff (x-1)^2+y^2 \geq 1$ $\longrightarrow$ extérieur au cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1

Décomposons le domaine : $D = D_1 \cup D_2$



$$L = \underbrace{\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,dx\,dy}_{L_1} + \underbrace{\iint_{D_2}(x^2+y^2)\,dx\,dy}_{L_2}$$

■ $L_1 = ?$ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\int_0^3 r^2\cdot r\,dr\right)d\theta$ $\quad\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$= \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_0^3 r^3 dr\right)$$

$$= \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3$$

$$= \pi \times \frac{81}{4} = \frac{81}{4}\pi$$

■ $L_2 = ? = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{OA}^{OB} r^2 \cdot r\,dr \right) d\theta$

- $OB = 3$
- $OA = ?$ sur le petit cercle

$x^2+y^2-2x=0$

$\Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta$

$\Rightarrow r = 2\cos\theta \quad (r\neq 0)$

donc $OA = 2\cos\theta$

$$L_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{2\cos\theta}^{3} r^3\,dr\right)d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{2\cos\theta}^{3} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (81 - 16\cos^4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{81}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \quad - 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{81}{4}\pi - 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2$$

$$= \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)$$

$$= \frac{1}{8}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$$

$$\Rightarrow L_2 = \frac{81}{4}\pi - \int_0^{\pi/2}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,d\theta$$

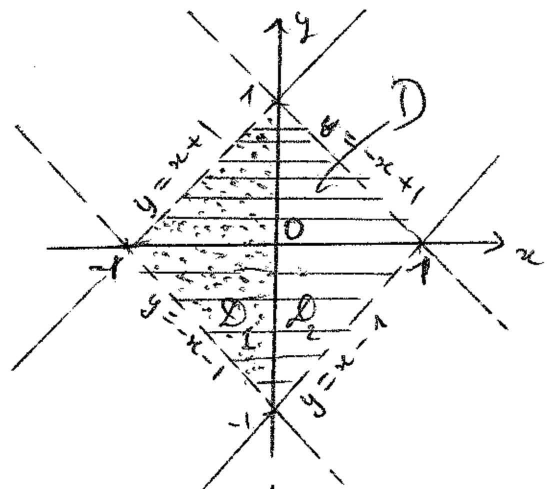
$$= \frac{81}{4}\pi - \left[3\theta+2\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{81}{4}\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{75}{4}\pi$$

Donc $L = L_1 + L_2 = \frac{81}{4}\pi + \frac{75}{4}\pi$

$= 39\pi$

e)



Décomposons le domaine : $D = D_1 \cup D_2$

$$M = \underbrace{\iint_{D_1} y\,dx\,dy}_{M_1} + \underbrace{\iint_{D_2} y\,dx\,dy}_{M_2}$$

■ $M_1 = ? = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-1}^{x+1} y\,dy\right)dx$

$$= \int_{-1}^{0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-x-1}^{x+1}dx$$

$$= 0$$

■ $M_2 = ? = \int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{-x+1} y\,dy\right)dx$

$$= \int_{0}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-1}^{-x+1}dx$$

$$= 0$$

$\Rightarrow M = 0 + 0 = 0$

Autre méthode : (changement de variable)

Posons $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u-v) \\ y = \frac{1}{2}(u+v) \end{cases}$

■ $(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x+y < 1 \\ -1 < y-x < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < u < 1 \\ -1 < v < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (u,v) \in \Delta$

où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < u < 1, -1 < v < 1\}$

■ Jacobien : $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$M = \iint_D y \, dx dy$$

$$= \iint_\Delta \frac{1}{2}(u+v) \left| \frac{1}{2} \right| du dv$$

$$= \frac{1}{4} \iint_\Delta (u+v) \, du dv$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (u+v) \, dv \right) du$$

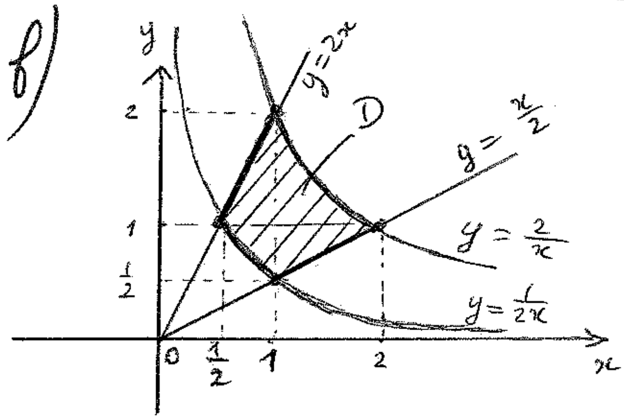
$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(\left[uv + \frac{v^2}{2} \right]_{-1}^{1} \right) du$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(u + \frac{1}{2} + u - \frac{1}{2} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{u}_{\text{impaire}} \, du$$

$$= 0$$

f)



■ $(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x} < y < \frac{2}{x} \\ \frac{x}{2} < y < 2x \\ x > 0, \; y > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < xy < 2 \\ \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2 \\ x > 0, \; y > 0 \end{cases}$ (S)

Posons $x = \frac{u}{v}$ et $y = uv$ avec $u > 0, v > 0$

donc $\begin{cases} xy = u^2 \\ \frac{y}{x} = v^2 \end{cases}$ avec $u > 0, v > 0$

càd $\begin{cases} u = \sqrt{xy} \\ v = \sqrt{\frac{y}{x}} \end{cases}$

Ainsi (S) s'écrit $\begin{cases} \frac{1}{2} < u^2 < 2 \\ \frac{1}{2} < v^2 < 2 \\ u > 0, \; v > 0 \end{cases}$

càd $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} < u < \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < v < \sqrt{2} \end{cases}$

Donc lorsque (x,y) décrit D, le point (u,v) décrit le carré $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2} < u < \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} < v < \sqrt{2}\}$

■ Jacobien : $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = 2\frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow N = \iint_{\Delta} 2\frac{u}{v}\,du\,dv$$

$$= \left(\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} 2u\,du\right)\cdot\left(\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \frac{dv}{v}\right)$$

$$= \left[u^2\right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \cdot \left[\ln v\right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}$$

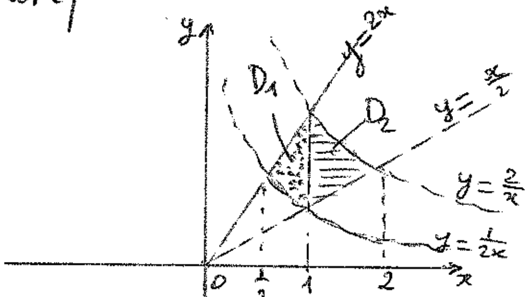
$$= \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\ln\sqrt{2}+\ln\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 2\ln\sqrt{2}$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2$$

autre méthode :

Décomposons le domaine $D = D_1 \cup D_2$



$$N = \underbrace{\iint_{D_1} dx\,dy}_{N_1} + \underbrace{\iint_{D_2} dx\,dy}_{N_2}$$

* $N_1 = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{1/2x}^{2x} dy\right)dx$

$$= \int_{1/2}^{1}\left(2x - \frac{1}{2x}\right)dx$$

$$N_1 = \left[x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right]_{1/2}^{1}$$

$$= (1-0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

* $N_2 = \int_{1}^{2}\left(\int_{x/2}^{2/x} dy\right)dx$

$$= \int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \left[2\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_{1}^{2}$$

$$= (2\ln 2 - 1) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow N = N_1 + N_2 = \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\ln 2 + 2\ln 2 - \cancel{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2$$