Solution final 18-19. (MVA006)

Ex1

1) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases}$

$M(1, -1)$ est le seul point critique de f

2) $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$; $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$;

$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$D = AB - C^2 = 4 > 0$; $A > 0$

donc M est un minimum local.

3) $f(M) = -2$;

$f(x,y) + 2 = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$
$= (x-1)^2 + (y+1)^2 \geq 0$

$f(x,y) \geq f(M)$ $\forall (x,y)$ donc M est un minimum global.

Ex2:

1) x, y et $\vec{F}$ sont 2π-périodiques.
$D = [-\pi, \pi]$.

2) $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à ox ; $D = [0, \pi]$

3) $\vec{F}' = (-2\sin t - 2\sin 2t)\vec{i} + (2\cos t + 2\cos 2t)\vec{j}$

$\vec{F}'' = (-2\cos t - 4\cos 2t)\vec{i} + (-2\sin t - 4\sin 2t)\vec{j}$

$\vec{F}''' = (2\sin t + 8\sin 2t)\vec{i} + (-2\cos t - 8\cos 2t)\vec{j}$

$x' = 0 \Leftrightarrow t = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}, \pi$

x' et y' s'annulent simultanément au point $t = \pi$.

$\vec{F}''(\pi) = -2\vec{i}$; $p = 2$

$\vec{F}'''(\pi) = -6\vec{j}$; $q = 3$

$M(\pi) = (-1, 0)$ est un pt de rebroussement de 1ère espèce

4) $\lim_{t \to 0} \frac{y'}{x'} = \infty$, la tangente en $M(0) = (3, 0)$ est // à $y'y$

5) $x = 0 \Leftrightarrow 2\cos t + \cos 2t = 0$

$2\cos^2 t + 2\cos t - 1 = 0$

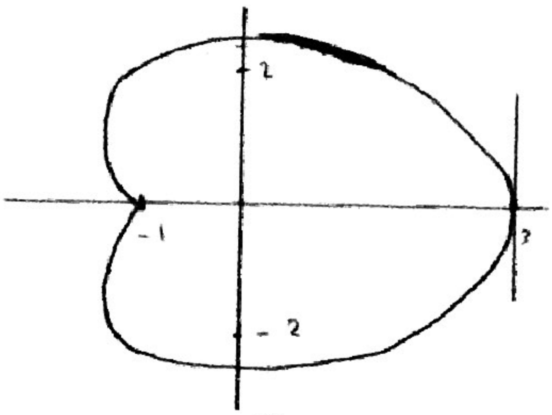
$\cos t \simeq \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $t \simeq 68.5$

$y \simeq 2.5$ et par symétrie $y \simeq -2.5$.

6)

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
x'	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	3	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
y'		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0
m	∞		0		∞		

7)



8) $\int_0^{\pi} -4\cos 2t\,dt - 12\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos t\,dt$

$+\int_0^{\pi} 2\cos 4t\,dt + 6\int_0^{\pi}(1-2\sin^2 t)\cos t\,dt$

$= -2\sin 2t - 12\,\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{1}{2}\sin 4t$

$+ 6\sin t - 12\,\frac{\sin^3 t}{3}\Big]_0^{\pi}$

$= 0$

Ex3: $(C)\cap(D)$:

$y^2 = 2-y$

$y^2+y-2=0$

$y=-2$ ou $y=1$

$\mathcal{A}(D) = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2}^{2-y} dx$

$= \int_{-2}^{1} (2-y-y^2)\,dy$

$= 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big]_{-2}^{1}$

$= \frac{3}{2}$.

Ex4: i) $J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$

$\Rightarrow J(u,v)=1$; $dx\,dy = du\,dv$.

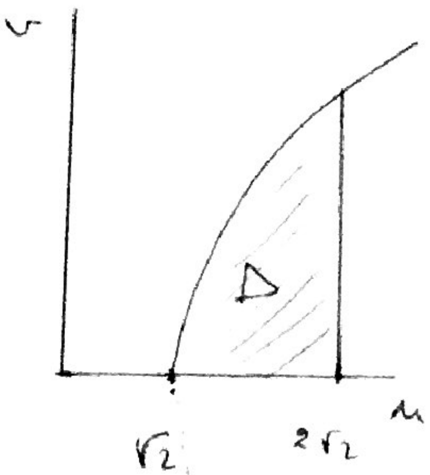
2) $u^2-v^2 = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(-x+y)^2\right]$

$= 2xy$.

$xy>1 \Leftrightarrow u^2-v^2>2$

$y>x \Leftrightarrow v>0$

$x+y<4 \Leftrightarrow u<2\sqrt{2}$



3) $f(x,y) = -2uv\cos\frac{u^2-v^2}{2}$

$I = \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} du \int_0^{\sqrt{u^2-2}} -2uv\cos\frac{u^2-v^2}{2}\,du\,dv$

$$\int_0^{\sqrt{u^2-2}} -2uv\cos\frac{u^2-v^2}{2}\,du\,dv =$$

$$2u\sin\frac{u^2-v^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{u^2-2}} =$$

$$2u\sin 1 - 2u\sin\frac{u^2}{2}$$

$$I = \int_{\sqrt2}^{2\sqrt2}\left(2u\sin 1 - 2u\sin\frac{u^2}{2}\right)du$$

$$= u^2\sin 1 + 2\cos\frac{u^2}{2}\Big]_{\sqrt2}^{2\sqrt2}$$

$$= 2\cos 4 - 2\cos 1 + 6\sin 1$$

Ex4 : les 2 paraboloïdes se rencontrent selon le cercle $x^2+y^2=1$ dans le plan $z=1 \parallel xoy$

$$I = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2}\,dz$$

$D = D(O,1)$ du plan xoy

$$I = \iint_D (x^2+y^2)^{3/2}\left[2-2(x^2+y^2)\right]dx\,dy$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3(1-r^2)\,r\,dr$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right] = \frac{8\pi}{35}$$

Ex5

1) $(A-6I)(A^2-3I)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 11 \\ 11 & 14 & 11 \\ 11 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

$(A-6I)(A^2-3I) =$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $A^3 - 3A - 6A^2 + 18I = 0.$

$$A\left[-\frac{1}{18}\left(A^2-6A-3I\right)\right] = I$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}\left(A^2-6A-3I\right)$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & +5 & -1 \end{pmatrix}$$

3) $|A| = 5 - 2 - 21 = -18 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^t(\mathrm{cof}(A)) = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{cof}(A)$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & +5 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Barème

Ex1 : 1) f'_x, f'_y, M pt critique : $1+1+1 =$ 3 pts ; 2) A, B, C, D M min local : $1+1+1+1+1 =$ 5 pts , 3) 2 pts

Ex2 : 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} =$ 1.5 pt 2) F', F'', F''' : $2+2+2 =$ 6 pts $x' = 0$: 1 pt ; $y' = 0$: 1 pt ; pt singulier $\frac{1}{2}$; p, q, nature : $1+1+1 =$ 3 pts 4) pente : 1 pt , deduct : 0.5 ; 5) eqt : 1 pt $y =$ 1 pt ; symetrie 1 pt ; 6) x', y', x, y : $1+1+1+1 =$ 4 pts 7) 3 pts 8) poser bien l'integrale 3 pts , primitive et solut : 1 pt

Ex3 : $(C)\cap(D)$: eqt 2 pts ; solut 2 pts , poser bien l'integrale avec les bonns limites : 8 pts , primitive et solut 3 pts

Ex4 : 1) 2 pts 2) $u^2 - v^2$: 2 pts , $xy > 1$, $y > x$, $x+y < 0$: $1+1+1 =$ 3 pts ; figure : 3 pts 3) $f(x,y)$: 2 pts ecriture de l'integrale avec les bonns limites 4 pts primitive et solut : 4 pts

Ex5 : $P_1 \cap P_2$: 2 pts ; bien poser l'integrale 5 pts , polaire 2 pts solut 1 pt

Ex6 : 1) 3 pts 2) $A^{-1} = -\frac{1}{18}(\ldots)$ 2 pts , $A^{-1} = (\quad)$ 2 pts 3) $|A| =$ 1 pt , A^{-1} : 4 pts 4) $x = A^{-1}b$ 1 pt , $x =$ 2 pts