

Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Durée :2h
Final
2016-2017

Sujet coordonné par :
J.Saab
Pour les centres :
Beyrouth-Baakline-
Baalbek-Ghazza-
Tripoli-Bickfaya
Langue : Français

Est autorisé :
Calculatrice Non Programmable

Final
Application de l'analyse à la géométrie - MVA006

Exercice 1 (20pts) On considère la fonction réelle de deux variables réelles

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1. Vérifier que f est une fonction symétrique : $f(a, b) = f(b, a)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
2. Calculer les dérivées partielles de premières et secondes de f
3. Vérifier que les points critiques de f se trouvent sur la deuxième bissectrice. Montrer que $M_1(0, 0)$ est un point critique de f et trouver les deux autres points critiques M_2 et M_3 .
4. Déterminer le signe de $f(0, h)$ et $f(h, h)$ où h est un infiniment petit, en déduire que M_1 n'est pas un extremum de f
5. Déterminer la nature de M_2 en déduire d'après 1) la nature de M_3 .

Solution

1- $f(b, a) = b^4 + a^4 - 2(b - a)^2 = a^4 + b^4 - 2(a - b)^2 = f(a, b)$ (2pts)

2- $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$

$12y^2 - 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; (1 × 5 = 5pts)

3- Les points critiques de f sont les solutions du système

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (1pts)$$

et par addition de ceux équations on obtient $y = -x$. (1pts)

Le point $M_1(0, 0)$ vérifie le système (1) et donc c'est un point critique de f (1pt).

D'autre part, pour $y = -x$ on a

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ c'est à dire $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont les deux autres points critiques de f (1.5 × 2 = 3pts)

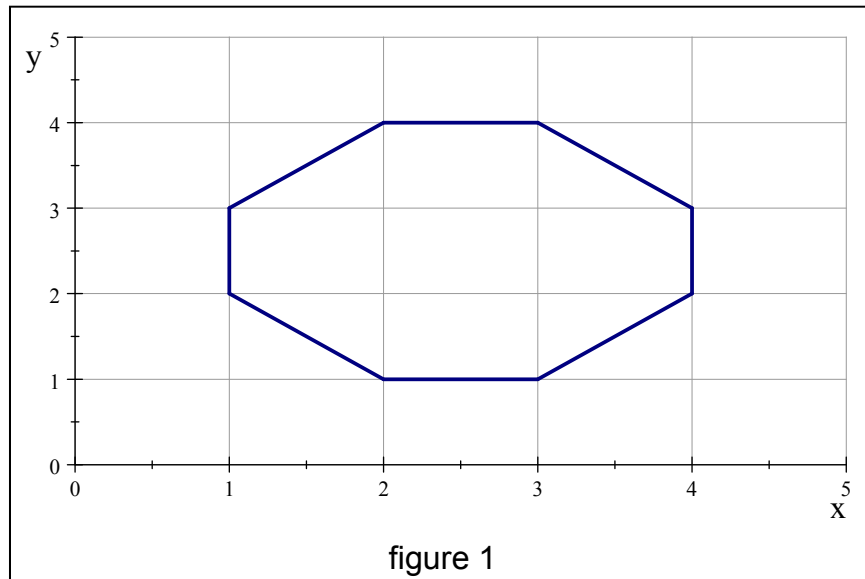
4- On a pour h voisin de 0 :

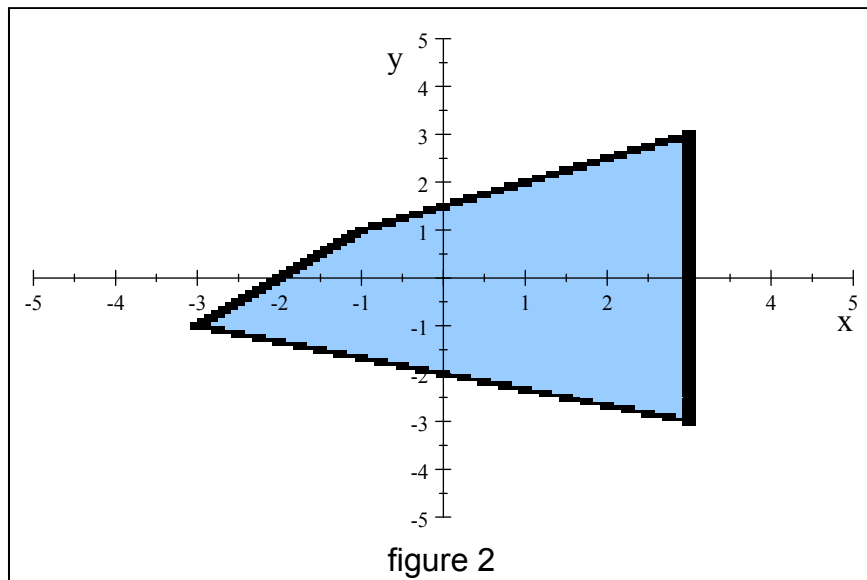
$$\begin{cases} f(0, h) = h^2(h^2 - 2) < 0 \\ f(h, h) = 2h^4 > 0 \end{cases} \quad (1 + 1 = 2pts)$$

il n'existe aucun $\delta > 0$ tel que dans le disque $D(0, \delta)$ la différence $f(x, y) - f(0, 0)$ a un signe fixe et par conséquent M_1 n'est pas un extremum de f (1pt)

5- On a, au point $M_2 : f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 384 > 0$ et $f''_{xx} = 20 > 0$ donc M_2 est un minimum local (2pts) . Comme $f(M_2) = f(M_3)$ alors M_3 est aussi un minimum local (2pts)

Exercice 2 (30pts) On considère les figures suivantes





1. Soit D la plaque homogène représentée dans la figure 1 (intérieur de l'octogone). Sans faire de calculs d'intégrales, déduire les valeurs de

$$\iint_D 1.dxdy, \quad \iint_D xdx dy, \quad \iint_D ydx dy$$

où chaque carreau est de 1 unité.

2. Calculer l'aire de la région en figure 2 limitée par les droites

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ 2y = x + 3 \\ 3y = -x - 6 \\ x = 3 \end{cases}$$

3. Après avoir représenté graphiquement la région

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant D homogène.

4. Illustrer par une figure, le domaine et calculer l'intégrale triple

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy dz.$$

Solution

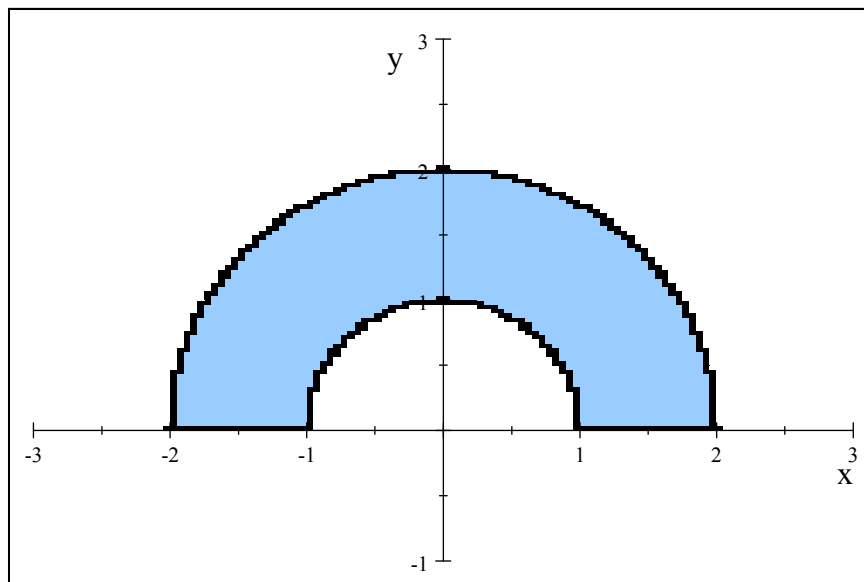
1- Le domaine D est formé de 7 carreaux donc l'aire de D est 7 (1pt) et donc $\iint_D dx dy = 7$ (1pt). Puisque le domaine est homogène, le centre de gravité de D est le point $G(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ (1pt).

On a : $x_G = \frac{1}{A(D)} \iint_D x dx dy$ (1pt) et

donc $\iint_D x dx dy = 7 \times \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$ (1pt). De même $\iint_D y dx dy = \frac{35}{2}$ (2pt)

2- $A(D) = \int_{-3}^{-1} dx \int_{-x-6}^{x+2} dy + \int_{-1}^3 dx \int_{\frac{-x-6}{3}}^{\frac{x+3}{3}} dy = \int_{-3}^{-1} (4x+4) dx + \int_{-1}^3 (\frac{5}{6}x + \frac{7}{2}) dx = 20$ (5pts = lière decomposition (3pts) + calcul (2pt))

3- (figure : 2pts)



Comme D est homogène alors G se trouve sur l'axe de symétrie de D , ainsi $x_G = 0$ (1pt) et $y_G = \frac{1}{A(D)} \iint_D y dx dy$ (0.5). L'aire de D est

$$A(D) = \frac{1}{2}(\pi \times 4 - \pi \times 1) = \frac{3}{2}\pi \quad (1pt)$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_1^2 r \sin \theta \cdot r dr = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_1^2 r^2 dr = \frac{14}{3}$$

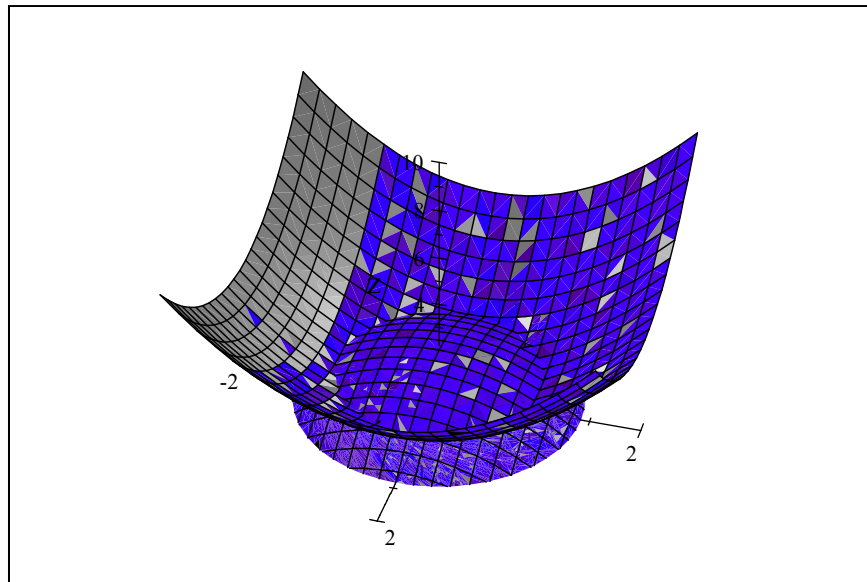
(lière intégrale (3pts) + calcul (1pt)) et par suite $G(0, \frac{28}{9\pi})$. (0.5pt)

4- (figure et domaine 3pts) On a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2) \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

et D n'est autre que le domaine limité par les deux paraboloides d'axe oz et de sommets $(0, 0, 0)$ et $(0, 0, 2)$

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z - 2 &= -(x^2 + y^2) \end{aligned}$$



ainsi $I = \iint_{\Delta} \left[\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dz \right] dx dy$ où Δ est le disque du plan xoy de centre o et de rayon 1 car les deux paraboloides se coupent selon le cercle horizontal de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1 (3pts).

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [r^3(2 - r^2 - r^2)r dr \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5}r^5 - \frac{2}{7}r^7 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{8}{35}\pi \end{aligned}$$

(lière intégrale : 2pts+ calcul 1pt)

Exercice 3 (30pts) On considère la fonction vectorielle $\vec{F}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$ avec

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$$

1. Donner la période de $x(t)$ et la période de $y(t)$ en déduire la période de $\vec{F}(t)$.
2. Montrer que l'on peut obtenir entièrement la trace γ de $\vec{F}(t)$ en réduisant le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ grâce à deux symétries que l'on précisera.
3. Donner $\vec{F}'(t)$, $\vec{F}''(t)$ et $\vec{F}'''(t)$, en déduire que le point $M(0) = M(0, 1)$ est un point singulier dont on précisera la nature.
4. Vérifier que la tangente à γ en $M(0)$ est $y'y$
5. Déterminer les points d'intersection de γ avec l'axe des abscisses
6. On va supposer que $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:
 - (a) Donner le tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$
 - (b) Construire le graphe de $\vec{F}(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ en déduire la construction entière de γ dans le domaine de $\vec{F}(t)$.
7. Soit $\vec{H}(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j}$. Calculer la circulation de \vec{H} le long de γ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Solution

1- x est de période $T_1 = 2\pi$ (0.5pt); y est de période $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ (0.5pt) et comme $T_1 = 3T_2$ alors \vec{F} est de période 2π (0.5pt).

2- Soit $D = [-\pi, \pi]$ le domaine d'étude de \vec{F} . On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc $y'y$ est un axe de symétrie (1pt). Nouveau domaine d'étude $D = [0, \pi]$. Aussi $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc $x'x$ est un axe de symétrie (1pt). Il suffit donc de faire l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et de compléter par symétrie (0.5).

3- On a

$$\vec{F}'(t) = 3 \sin^2 t \cos t \vec{i} - 3 \sin(3t) \vec{j} \quad (0.5pt)$$

$$\vec{F}''(t) = (6 \sin t \cos^2 t - 3 \sin^3 t) \vec{i} - 9 \cos(3t) \vec{j} \quad (0.5pt)$$

$$\vec{F}'''(t) = (6 \cos^3 t - 21 \sin^2 t \cos t) \vec{i} + 27 \sin(3t) \vec{j} \quad (0.5pt)$$

Aussi

$$\begin{cases} \vec{F}'(0) &= \vec{0} \\ \vec{F}''(0) &= -9 \vec{j} \neq \vec{0} \\ \vec{F}'''(0) &= 6 \vec{i} \neq \vec{0} \end{cases}$$

On a $\vec{F}'(0) = \vec{0}$ et $\vec{F}''(0) \neq \vec{0}$ donc $p = 2$ (1.5pt) et comme $\vec{F}'''(0) \neq \vec{0}$ et non colinéaire avec $\vec{F}''(0)$ alors $q = 3$ (1.5pt). p est pair et q est impair alors $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce (1pt).

4- On a $M(0) = (0, 1) \in y'y$ (0.5pt) et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'}{x'}(t) = \infty$ donc $y'y$ est tangent à (γ) en $M(0)$ (1pt).

5- $y = 0$ si $\cos(3t) = 0$ c.à.d $3t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $0 \leq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ ainsi

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq 1$$

si $k = 1$ alors $t_1 = \frac{\pi}{2}$ et si $k = 0$ alors $t_2 = \frac{\pi}{6}$. (3pts)

$$x(t_1) = 1; x(t_2) = \frac{1}{8} \quad (0.5 + 0.5 = 1pt)$$

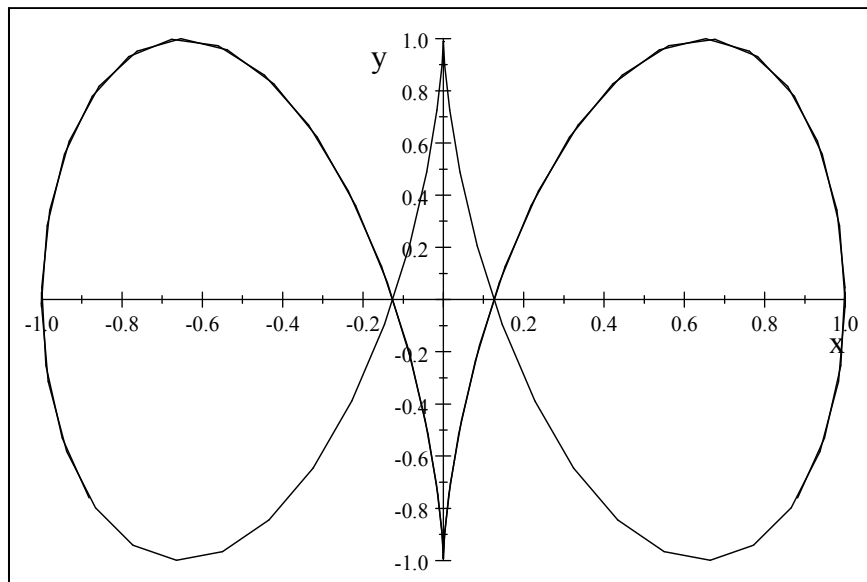
6-

a) On a $x'(t) \geq 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Par contre on a $0 < 3t < \frac{3\pi}{2}$ et donc si $0 < 3t < \pi$ c.à.d $0 < t < \frac{\pi}{3}$ on a $y' < 0$ et si $\pi < 3t < \frac{3\pi}{2}$ c.à.d $\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$ on a $y' > 0$. D'où e tableau

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x'		+	+
y'		-	0
x	0	$\nearrow \frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow 1$
y	1	$\searrow -1$	$\nearrow 0$

(signe de x' et de y' : 1.5 + 1.5 = 3pts; variation complète de x et y : 1.5 + 1.5 = 3pts)

b) (figure sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: 2pts; symétrie : 2pt)



$$7- \int_{\gamma} \vec{H} \overrightarrow{dM} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos(3t))(3 \sin^2 t \cos t) + (\sin^3 t)(-3 \sin(3t))] dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (\cos(3t) \cos t - \sin(3t) \sin t) dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos(4t) dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)) \cos(4t) dt$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{H} \overrightarrow{dM} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos(3t))(3 \sin^2 t \cos t) + (\sin^3 t)(-3 \sin(3t))] dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (\cos(3t) \cos t - \sin(3t) \sin t) dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos(4t) dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)) \cos(4t) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4t) dt - \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(6t) + \cos(2t)) dt \\ &= \left[\frac{3}{8} \sin(4t) - \frac{1}{8} \sin(6t) - \frac{3}{8} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(Poser l'integrale : 2pts; calcul : 3pts)

Exercice 4 (20pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} l'inverse de A
3. Retrouver A^{-1} par la méthode des cofacteurs ou par celle de Gauss-Jordan

4. Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases} \quad (S)$$

Résoudre le système (S)

5. Quelle relation doivent vérifier α et β (deux paramètres réels) pour que le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x + \alpha y + z = \beta \end{cases}$$

soit :

(a) un système surdéterminé ayant une solution unique

(b) impossible, n'a pas de solutions

Solution

1- (5pts) $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 11 \\ 11 & 14 & 11 \\ 11 & 11 & 14 \end{pmatrix}$;

$$(A - 6I)(A^2 - 3I) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} = (0)$$

2- $A^3 - 3A - 6A^2 + 18I = 0$ donc $A[\frac{-1}{18}(A^2 - 3I - 6A)] = I$, on en déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{-1}{18}(A^2 - 3I - 6A) \quad (3pts)$$

soit

$$A^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (2pts)$$

3- $|A| = -18 \neq 0$ (2pts), A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t \text{Cof}(A) = \frac{1}{|A|} \text{Cof}(A)$ car A est symétrique donc $\text{Cof}(A)$ (1pt)

$$A^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (2pts)$$

4-(3pts) Le système (S) est équivalent à $AX = b$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Comme A est inversible alors (S) admet une solution unique

$$X = A^{-1}b = \frac{-1}{18} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{-2}{3}, y = z = \frac{1}{3}$$

5- Le système est

- a) surdéterminé si $\alpha - 3\beta = 1$ (1pt)
- b) impossible si $\alpha - 3\beta \neq 1$ (1pt)