

Application de l'analyse à la géométrie (MVA006)
Rattrapage 2017-2018 ⌚ 2h :00



Téléphone et Calculatrice sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Bikfaya, Nahr Ibrahim, Tripoli.

Exercice 1 (15 points) On considère la fonction réelle de deux variables réelles

$$f(x, y) = 10x^2 - 9y^2 + 2xy - 24x + 34y$$

- Déterminer les (x, y) pour lesquels $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.
- Déterminer les (x, y) en lesquels f admet un maximum local ou un minimum local ou un point de selle (point col).

SOLUTION. 1

1. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 20x + 2y - 24 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -18y + 2x + 34 = 0 \end{cases} \quad \boxed{2+2=4\text{pts}}$$

On a un seul point critique $M(1, 2)$ $\boxed{2\text{pts}}$

2. $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20$; $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -18$; $C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$ et $\boxed{2+2+2=6\text{pts}}$

$$D = \begin{vmatrix} 20 & 2 \\ 2 & -18 \end{vmatrix} = -364 < 0 \quad \boxed{2\text{pts}}$$

donc M est un point de selle $\boxed{1\text{pt}}$

Exercice 2 (25 points) : On considère la courbe paramétrée

$$C(t) : \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

- Donner son domaine de définition.
- Calculer $\lim_{t \rightarrow -1} x(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -1} y(t)$ et montrer que $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = -1$ et que $\lim_{t \rightarrow -1} (y+x) = -\frac{1}{3}$. En déduire l'équation de l'asymptote à (C) au point -1 .

3. Montrer que $x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ et que $y'(t) = t \frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}$.
4. On admet qu'on peut restreindre l'étude à $] -1, 1[$ et qu'on peut faire une symétrie par rapport à $y = x$. Déterminer le tableau de variation de (x, y) sur $] -1, 1[$ et préciser la nature des points singuliers s'il y en a.
5. Tracer la courbe paramétrée.

SOLUTION. 2

1. $D = \mathbb{R} - \{-1\}$. 2pts

2. $\lim_{t \rightarrow -1} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow -1} y(t) = \infty$. D'autre part $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2}{t} = -1$ et 2+2+2=6pts

$$\lim_{t \rightarrow -1} (y + x)(t) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + t}{t^3 + 1} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{2t + 1}{3t^2} = -\frac{1}{3}. \quad \text{2pts}$$

Parsuite $y = -x - \frac{1}{3}$ est une asymptote à (C) au point -1 . 2pts

3. $x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ et $y'(t) = \frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}$. 2+2=4pts

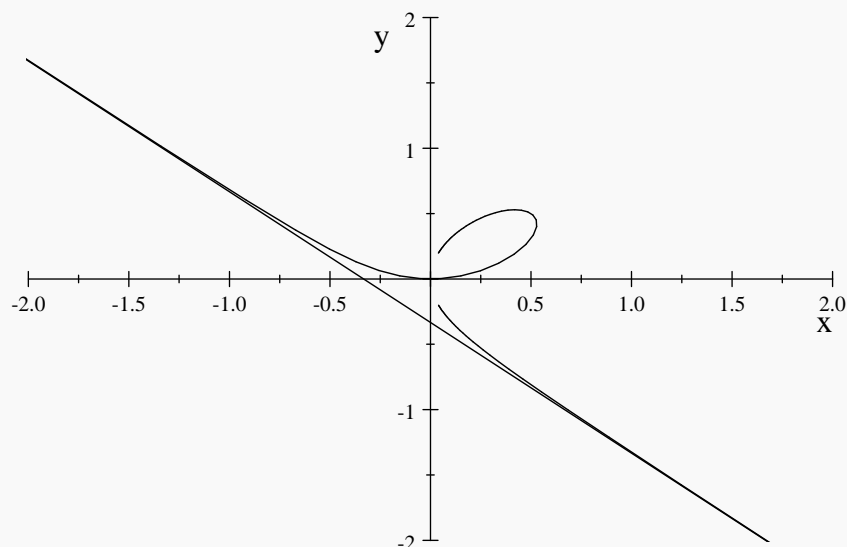
4.

t	-1	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1				
$x'(t)$		+	+	0	-			
$y'(t)$		-	0	+	+			
$x(t)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$	\searrow	$\frac{1}{2}$	
$y(t)$	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$	

4pts

D'un autre coté, le tableau de variation donne une allure naturelle de la courbe entre $t = -1$ et $t = 1$. ($x'(t)$ et $y'(t)$ ne s'annulent pas en même temps) par contre la courbe passe par $o(0, 0)$ et s'arrete au point $(1, 1)$ appartenant à $y = x$ qui est un axe de symétrie, en continuant la courbe selon cette symétrie, la courbe va repasser par $o(0, 0)$ et donc le point $(0, 0)$ est un point double. 2pts

5. 3pts



Exercice 3 (15 points) : Etudier la variation et tracer la courbe en coordonnées polaires

$$r(\theta) = 2 \cos \theta + 1.$$

SOLUTION. 3

a courbe est périodique de période 2π , on fait l'étude sur $[-\pi, \pi]$ **3pts**. On a $r(-\theta) = r(\theta)$ donc $x'x$ est un axe de symétrie, on peut étudier la courbe sur $[0, \pi]$ et compléter par symétrie par rapport à $x'x$. **3pts**

$r'(\theta) = -2 \sin \theta < 0$ et $r(\theta)$ décroît de 3 à -1. **2+3pts**

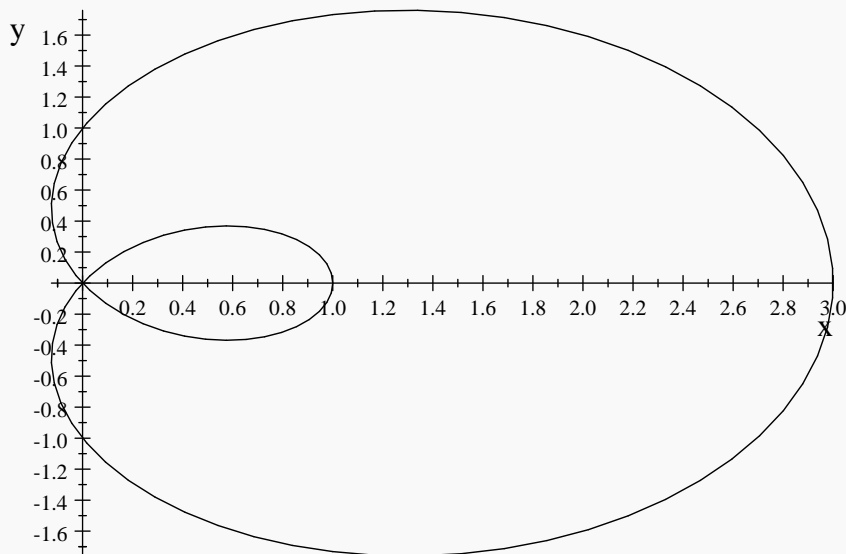


figure 4pts

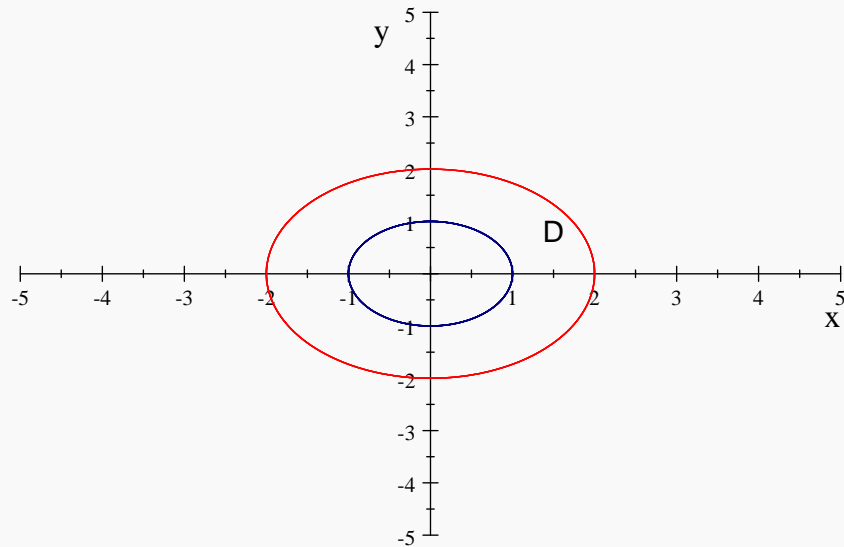
Exercice 4 (25 points) Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

1. Donner une représentation graphique de D .
2. Calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région D homogène.
3. Calculer $I = \iint_D (3x + 4y^2) dx dy$
4. Si vous vouliez intégrer une fonction $f(x, y)$ sur D en utilisant les coordonnées cartésiennes, comment définiriez-vous le bord de cette intégrale ?

 SOLUTION. 4

1. 3pts



2. Soit G le centre de gravité de D . On a

$$x_G = \frac{\int \int_D x dx dy}{A(D)} \quad \boxed{1\text{pts}}$$

$$y_G = \frac{\int \int_D y dx dy}{A(D)} \quad \boxed{1\text{pts}}$$

où l'aire de D est $A(D) = \pi(2)^2 - \pi(1)^2 = 3\pi$. 3pts D'autre part

$$\int \int_D x dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \cos \theta dr = 0 \quad \boxed{3\text{pts}}$$

et

$$\int \int_D y dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \sin \theta dr = -\cos \theta \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \right) = 0. \quad \boxed{3\text{pts}}$$

D'où $G(0, 0)$ 2pts

$$3. I = \iint_D (3x + 4y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr \quad \boxed{3\text{pts}} = 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \times \int_1^2 r^3 dr = 15 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{15}{2} [2\pi] = 15\pi \quad \boxed{2\text{pts}}$$

$$4. I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \quad \boxed{4\text{pts}}$$

Exercice 5 (20 points) On considère le système linéaire réel suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} -x + ay + z = 1 \\ x - ay + z = a \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel

1. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il un système de Cramer. Trouver dans ce cas, sa solution.
2. Dans le cas où (S) n'est pas de Cramer, discuter et résoudre le système (S) .
3. Pour $a = 1$ calculer A^{-1} , la matrice inverse de A (matrice du système) et retrouver, en utilisant A^{-1} , la solution de (S) .

SOLUTION. 5

1. Le système (S) est de Cramer si

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \boxed{2\text{pts}}$$

donc $4a \neq 0$ c.à.d $a \neq 0$. $\boxed{2\text{pts}}$ Dans ce cas on a une solution unique

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad \boxed{1.5\text{pts}}$$

où $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 1 & -a & a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a$. $\boxed{1+1+1=3\text{pts}}$ D'où

$$x = \frac{a+1}{2}, y = \frac{1}{a}, z = \frac{a+1}{2} \quad \boxed{1.5\text{pts}}$$

2. si $a = 0$ le système devient

$$\begin{cases} -x + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \boxed{1\text{pts}}$$

donc $1 = -1$ et le système est impossible $\boxed{1\text{pts}}$

3. Si $a = 1$ la matrice de (S) devient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1\text{pts}}$$

et $\det(A) = 4 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse $A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\text{Cof}(A)$ $\boxed{1\text{pts}}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{2\text{pts}}$$

La solution de (S) pour $a = 1$ est $X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{2.5\text{pts}}$ c'est

qui rejoint le résultat ci-dessus

$$x = \frac{a+1}{2} = 1, y = \frac{1}{a} = 1, z = \frac{a+1}{2} = 1 \quad \boxed{1.5\text{pts}}$$