

Application de l'analyse à la géométrie (MVA006)

Final 2017-2018

 2h :00



Téléphone et Calculatrice sont interdites

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Bikfaya, Nahr Ibrahim, Tripoli.

Exercice 1 (15 points) On considère la fonction réelle de deux variables réelles

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

1. Montrer que f admet deux points critiques que l'on déterminera.
2. En étudiant le wronskian de f , montrer que l'un des points critiques est un point de selle et que l'autre est un extremum local dont on déterminera la nature. On va noter par M_1 le point de selle et M_2 est le point extremum local.
3. Montrer par une autre méthode que M_1 n'est pas un extremum.
4. Montrer que f n'admet pas d'extremums globaux

 SOLUTION. 1

1. Les points critiques de f sont

$$\begin{cases} \partial_x f = 0 \\ \partial_y f = 0 \end{cases} \quad \boxed{1\text{pt}}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \boxed{2\text{pts}}$$

ce qui donne $M_1(0, 0)$ et $M_2(1, 1)$ sont les points critiques de f $\boxed{2\text{pts}}$

2. $A = \partial_{xx}^2 f = 6x$, $B = \partial_{yy}^2 f = 6y$, $C = \partial_{xy}^2 f = -3$ et $D = AB - C^2 = 36xy - 9$: $\boxed{4\text{pts}}$

$$D(0, 0) < 0 \text{ donc } M_1 \text{ est un point de selle} \quad \boxed{1\text{pts}}$$

$$D(1, 1) > 0 \text{ et } A(1, 1) > 0 \text{ donc } M_2 \text{ est un minimum local} \quad \boxed{1\text{pts}}$$

3. $f(x, 0) - f(0, 0) = x^3$ n'a pas de signe fixe au voisinage de 0 et donc M_1 n'est pas un extremum $\boxed{2\text{pts}}$

4. Si f devait avoir un extremum global cela devrait être un minimum et cela doit être M_2 , avec une valeur $f(1, 1) = -1$; or

$$f(x, 0) = x^3 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

et par suite f n'admet pas de minimums globaux. $\boxed{2\text{pts}}$

Exercice 2 (30 pts) : On considère la courbe paramétrée

$$C(t) : \begin{cases} x(t) &= \cos^2 t + \ln |\sin t| \\ y(t) &= \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$$

1. Montrer que $(C(t))$ est périodique de période $T = \pi$
2. Montrer que l'on peut obtenir entièrement (C) en se contentant de faire une étude sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et en complétant par une symétrie à préciser.
3. Montrer que (C) admet une asymptote et donner son équation
4. Montrer que $x'y'' - x''y' = \frac{\cos^2 2t}{\sin^2 t}$, en déduire l'existence de points singuliers de (C) dont on déterminera la nature.
5. Etudier la variation de $x(t)$, $y(t)$ et construire le graphe de (C)
6. Montrer que $x'(t)^2 + y'(t)^2$ peut s'écrire sous la forme

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{\cos^2 2t}{\sin^2 t}$$

en déduire la longueur du chemin de (C) correspondant à $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

(On donne $\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x + 1} \right)$)

SOLUTION. 2

1. $\cos^2 t$ est de période π , $|\sin t|$ est de période π donc $x(t)$ est de période π , aussi $\sin(2t)$ est de période $\frac{2\pi}{2} = \pi$ donc $y(t)$ est de période π et par suite $C(t)$ est de période π . [1.5 pt]
2. Soit $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$ car \ln n'est pas définie en 0. On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc $x'x$ est un axe de symétrie, on peut étudier (C) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et la compléter par symétrie par rapport à $x'x$. [2pts]
3. $\lim_{x \rightarrow 0} x(t) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} y(t) = 0$ donc $y = 0$ c'est à dire $x'x$ est une asymptote [2pts]
4. Soit $\vec{F}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$. les vecteurs $\vec{F}' = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}$ et $\vec{F}'' = x''(t) \vec{i} + y''(t) \vec{j}$ sont colinéaires si

$$x'y'' - x''y' = 0 \quad [1pts]$$

avec

$$x'(t) = \frac{\cos t \cos 2t}{\sin t} \quad [1pts]$$

$$x''(t) = -\frac{\cos 2t + \sin^2 2t}{\sin^2 t} \quad [1pts]$$

$$y'(t) = \cos 2t \quad [1pts]$$

$$y''(t) = -2 \sin 2t \quad [1pts]$$

il en vient que $x'y'' - x''y' = \frac{\cos^2 2t}{\sin^2 t} = 0$ si $t = \frac{\pi}{4}$ [2pts]. On a $x'''(t) =$

$\frac{1}{2\sin^3 t} (6 \cos t - 3 \cos 3t + \cos 5t)$ et $y'''(t) = -4 \cos 2t$. [2pts] En résumé :

$$\vec{F}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vec{0} \quad [1\text{pts}]$$

$$\vec{F}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\vec{i} - 2\vec{j} \neq \vec{0} \quad [1\text{pts}]$$

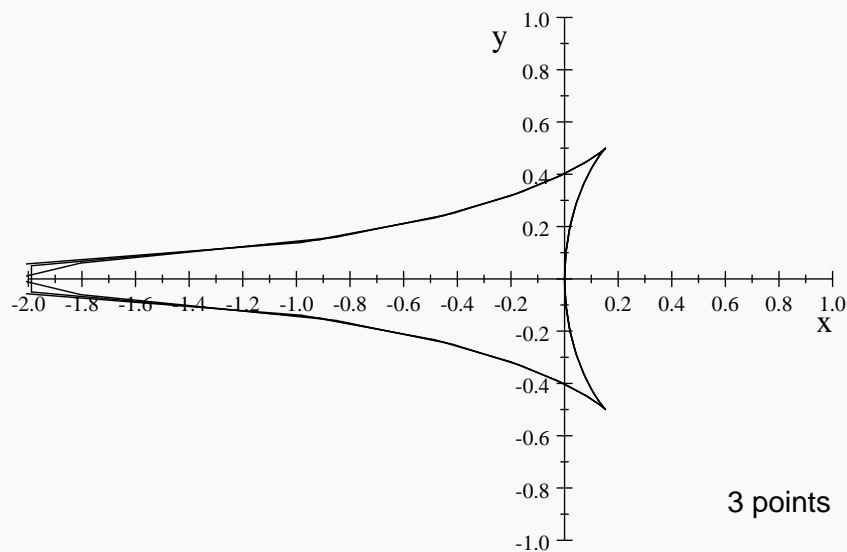
$$\vec{F}'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\vec{i} \neq \vec{0} \text{ et non // avec } \vec{F}''\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad [1\text{pts}]$$

soit $p = 2$ pair et $q = 3$ impair donc $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}(1 - \ln 2), \frac{1}{2}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce [2pts].

5. Le T.D.V est

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$x'(t)$		+	0	-
$y'(t)$		+	0	-
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$	\searrow	0
$y(t)$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	\searrow	0

[3pts]



6. On a

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= \left(\frac{\cos t \cos 2t}{\sin t}\right)^2 + (\cos 2t)^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 t} [\cos^2 t \cos^2 2t + \sin^2 t \cos^2 2t] \\ &= \frac{\cos^2 2t}{\sin^2 t} \quad [2\text{pts}] \end{aligned}$$

La longueur de la courbe en question est

$$\begin{aligned}
 l(\gamma) &= \int_{\gamma} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad \boxed{\text{1pts}} \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos 2t|}{\sin t} dt = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t}{\sin t} dt \quad \boxed{\text{1pts}} \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 t - 1}{\sin t} dt \\
 &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt \\
 &= 2 [\cos t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x + 1} \right) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) \quad \boxed{\text{1pts}}
 \end{aligned}$$



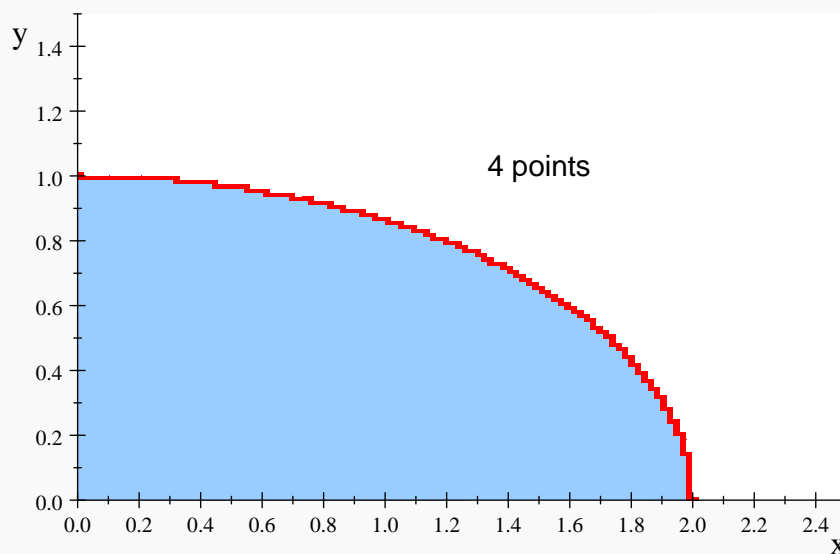
Exercice 3 (20 points) : Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 défini par

$$D = \left\{ (x, y) / x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

On suppose que $a > 0$ et $b > 0$. Tracer D et calculer $\int \int_D (x^3 - 2y) dx dy$ en utilisant le changement

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$$

 SOLUTION. 3



On vérifie que le jacobien $J = abr$ 3pts et donc

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 [a^3 r^3 \cos^3 \theta - 2br \sin \theta] abr dr && \text{8pts} \\
 &= \frac{a^4 b}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta - \frac{2}{3} ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{a^4 b}{5} \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2ab^2}{3} [\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2a^4 b}{15} - \frac{2ab^2}{3}. && \text{5pts}
 \end{aligned}$$

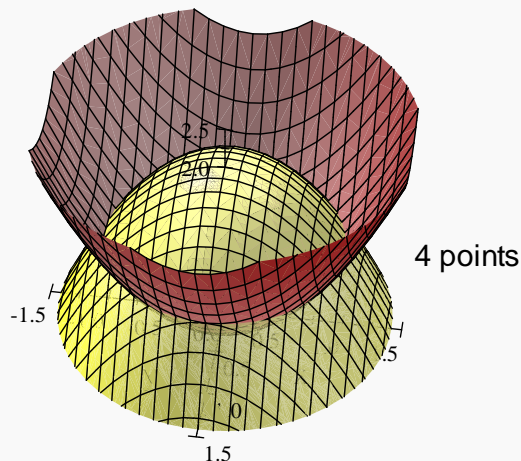
Exercice 4 (15 points) Soit D le domaine de \mathbb{R}^3 limité par

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

Calculer $\int \int \int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy dz$

SOLUTION. 4

Le domaine D est limité par deux paraboloides



L'intersection de deux paraboloides se trouve dans le plan horizontal $z = 1$ selon le cercle de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1 4pts de sorte que la projection de D sur le plan xoy est le disque de centre o et de rayon 1 :

$$\Delta = \text{proj}_{xoy}(D) = D[0, 1] \quad \text{2pts}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \int_{\Delta} \left[\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dz \right] dx dy && \text{3pts} = 2 \int \int_{\Delta} (x^2 + y^2)^{3/2} [1 - (x^2 + y^2)] dx dy = \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 (1 - r^2) \cdot r dr = 4\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right] = \frac{8\pi}{35}. && \text{2pts}
 \end{aligned}$$

Exercice 5 (20 points) On considère le système linéaire réel suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ x + (2a-1)y + 3z = 1 \\ x + ay + (a+3)z = 2a-1 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel

1. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il un système de Cramer. Trouver dans ce cas, sa solution.
2. Dans le cas où (S) n'est pas de Cramer, discuter et résoudre le système (S) .
3. Pour $a = 0$ calculer A^{-1} , la matrice inverse de A (matrice du système) et retrouver, en utilisant A^{-1} , la solution de (S) .

SOLUTION. 5

1. Le système (S) est de Cramer si $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a+3 \end{vmatrix} \neq 0$ soit $a \neq \pm 1$. 3 pts On a une solution unique

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

avec $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 2a-1 & a & a+3 \end{vmatrix} = (a-1)(5-a)$ 1 pt; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2a-1 & a+3 \end{vmatrix} = -2(a-1)$ 1 pt et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 1 & a & 2a-1 \end{vmatrix} = 2(a-1)^2$ 1 pt. La solution est

$$x = \frac{5-a}{a+1}, \quad y = -\frac{2}{a+1} \quad \text{et} \quad z = \frac{2(a-1)}{a+1} \quad \text{[1.5pts]}$$

2. Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases} \quad \text{[0.25 pt]}$$

donc $z = 0$ et $x = 1 - y$. On a un système sous-déterminé admettant une infinité de solutions

$$S = \{X = (1 - y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \quad \text{[2pts]}$$

Si $a = -1$:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 3y + 3z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases} \quad \text{[0.25 pt]}$$

donc $1 = -3$ et le système est impossible $S = \emptyset$. 2pts

3. Si $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $|A| = -1 \neq 0$, la matrice A est inversible 1 pt et son inverse $A^{-1} = -{}^t\text{Cof}(A)$ 1 pt soit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{[4pts]}$$

Le système $AX = b$ donne $X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2pts

qui rejoint le résultat précédent en posant $a = 0$.

