Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam Liban

Application de l'analyse à la géométrie (MVA006)

Final 2019-2020 **2h :00**

Téléphone et Calculatrice sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centre de Beyrouth et les antennes regionales

Exercice 1 (*15 points*) On considère la fonction réelle de deux variables réelles

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

1. Montrer que f admet trois points critiques et déterminer les.
2. En étudiant le wronskian de f, déterminer la nature local de ces points: (minimum local, maximum local, point selle).

SOLUTION. 1

1. Les points critiques de f sont donnés par : $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ c'est à dire :

$$\begin{cases} -2x + 2x^3 & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{cases} \boxed{2 \text{ pts}}$$

On obtient $x = 0$ ou $x^2 = 1$ et $y = 0$. D'où les points critiques de f sont $M_1(0, 0), M_2(-1, 0)$ et $M_3(1, 0)$.$\boxed{3 \text{ pts}}$

2. Soit $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 + 6x^2, B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$\boxed{3 \text{ pts}}$

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C^2 = AB = -4 + 12x^2 \ \boxed{3 \text{ pts}}$$

On a :

(a) $D(M_1) = -4 < 0$ et M_1 est un point selle. $\boxed{2 \text{ pts}}$

(b) $D(M_2) = D(M_3) = 8 > 0$ et $A(M_2) = A(M_3) = 4 > 0$ (d'ailleurs $f(M_2) = f(M_3)$) donc M_2 et M_3 sont deux minimums locaux. $\boxed{2 \text{ pts}}$

Exercice 2 (*25 points*) : On considère la fonction vectorielle $\vec{F}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j}$ avec

$$\begin{cases} x(t) & = & \sin^3 t \\ y(t) & = & \cos 3t \end{cases}$$

1. Montrer que le point $M(0) = (0, 1)$ est un point de rebroussement de première espèce de la courbe (γ) définie par $\vec{F}(t)$.

2. Donner la période de $x(t)$ et la période de $y(t)$ en déduire que $\vec{F}(t)$ est de période $T = 2\pi$.
3. Montrer que l'on peut obtenir entièrement la trace (γ) de $\vec{F}(t)$ en réduisant le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ grâce à deux symétries que l'on précisera.
4. Etablir le tableau de variation double de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
5. Tracer la partie de (γ) correspondante à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et completer γ grâce aux symétries qu'on avait déjà trouvées.
6. Déterminer, grâce à la courbe (γ), tous les points singuliers de $\vec{F}(t)$. (points doubles, points de rebroussements)

SOLUTION. 2

1. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F'}(t) &= 3\sin^2 t\cos t\ \overrightarrow{i} - 3\sin 3t\ \overrightarrow{j} \qquad \boxed{2 \text{ pts}}\\
\overrightarrow{F''}(t) &= 3[2\sin t\cos^2 t\ -\sin^3 t]\overrightarrow{i} - 9\cos 3t\ \overrightarrow{j}\ \boxed{2 \text{ pts}}\\
\overrightarrow{F'''}(t) &= 3[2\cos^3 t\ - 4\sin^2 t\cos t - 3\sin^2 t\cos t]\overrightarrow{i} + 27\sin 3t\ \overrightarrow{j}\ \boxed{2 \text{ pts}}
\end{aligned}$$

Étant donné que $\overrightarrow{F'}(0) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{F''}(0) = -9\overrightarrow{j} \neq \overrightarrow{0}$ donc $p = 2$ est pair, $\overrightarrow{F'''}(0) = 6\overrightarrow{i} \neq \overrightarrow{0}$ et non colinéaire avec $\overrightarrow{F''}(0)$ donc $q = 3$ est impair,$\boxed{2 \text{ pts}}$ parsuite $M(0) = (0, 1)$ est un point de rebroussement de première espèce. $\boxed{1 \text{ pt}}$

2. On a $x(t)$ est de période 2π $\boxed{1 \text{ pt}}$et $y(t)$ est de période $\frac{2\pi}{3}$ $\boxed{1 \text{ pt}}$ donc $\vec{F}(t+2\pi) = (x(t+2\pi), y(t+2\pi)) = (x(t), y(t+3.\frac{2\pi}{3})) = (x(t), y(t)) = \vec{F}(t)$ et $\vec{F}(t)$ est de période 2π. $\boxed{1 \text{ pt}}$

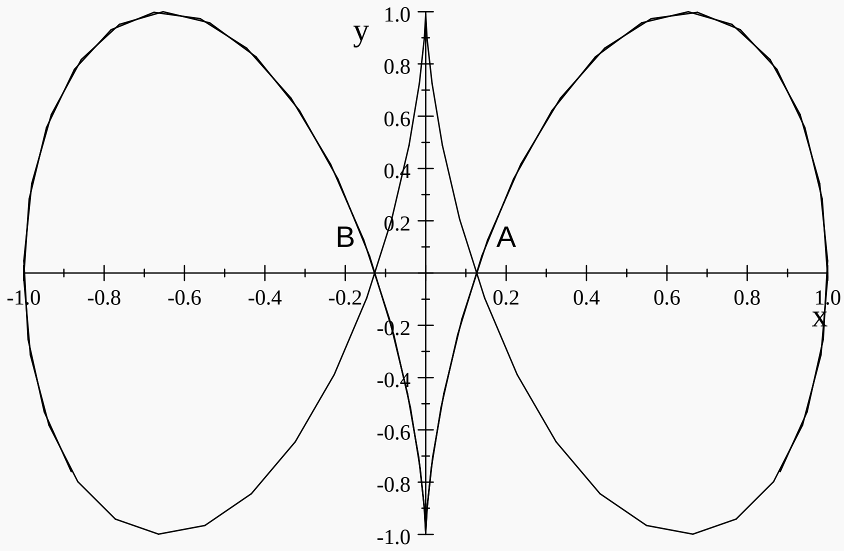
3. Soit $D = [-\pi, \pi]$. On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc $y'y$ est un axe de symétrie, $\boxed{2 \text{ pts}}$ on considère comme nouveau domaine $D = [0, \pi]$.D'autre part $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = \cos(\pi - 3t) = -\cos 3t = -y(t)$ et donc $x'x$ est un axe de symétrie.$\boxed{2 \text{ pts}}$ On peut réduire le domaine à $D = [0, \frac{\pi}{2}]$ et compléter par symétrie par rapport à $x'x$ et $y'y$. $\boxed{2 \text{ pts}}$

4.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$		$+$	
$y'(t)$		$-$		$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

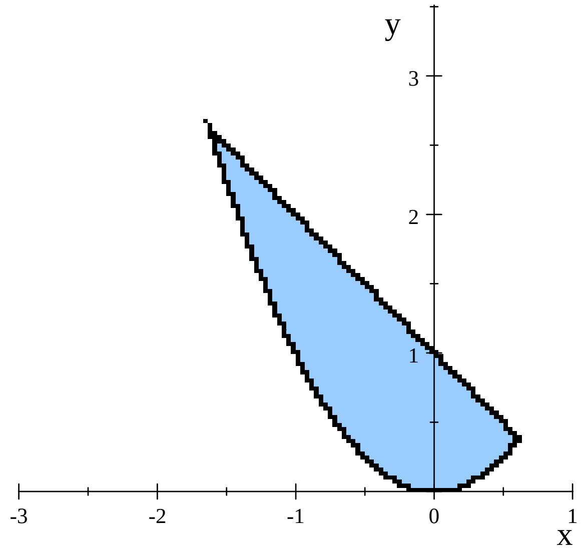
$\boxed{4 \text{ pts}}$

5. $\boxed{3 \text{ pts}}$



6. Les points de rebroussement de première espèce sont $(0,-1),(0,1)$ et les points doubles sont les points A et B sur l'axe $x'x$. $\boxed{\text{2 pts bonus}}$

Exercice 3 (*15 points*) : On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > x^2,\ y + x < 2\}$



Calculer l'aire de D.

SOLUTION. 3

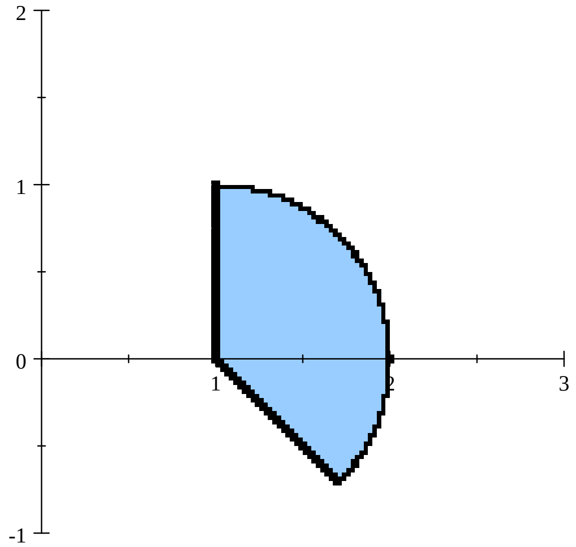
A(D)=$\int\int_D dxdy$. $\boxed{\text{2 pts}}$ Les points de rencontre de deux courbes sont

$$x^2 + x - 2 = 0$$

donc $x_1 = 1, x_2 = -2$. $\boxed{\text{4 pts}}$ Donc $A(D) = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} dy$ $\boxed{\text{6 pts}}$ $= \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$ $\boxed{\text{3 pts}}$

Exercice 4 (*20 points*) Soit D le domaine défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2 + y^2 < 1, x + y > 1, x > 1\}$$



Calculer $\int\int_D xydxdy$.

SOLUTION. 4

Soit A le point de rencontre de $x+y=1$ avec le cercle. On a $2y^2 = 1$ donc $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{\text{4 pts}}$ ainsi si I est le centre du cercle alors l'angle que fait $\overrightarrow{IA}$ avec $x'x$ est $\frac{\pi}{4}$. $\boxed{\text{2 pts}}$ Soit $x - 1 = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. $\boxed{\text{2 pts}}$ On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin\theta(1 + r\cos\theta)dr \quad \boxed{\text{6 pts}} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin\theta dr + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \sin\theta\cos\theta dr \\ &= [-\cos\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{3}) + \left[\frac{\sin^2}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{16} \quad \boxed{\text{6 pts}} \end{aligned}$$

Exercice 5 (*25 points*) Soit le système linéaire d'inconnues x, y, z et de paramètre reél m :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - my + m^2 z &=& m \\ mx - m^2 y + mz &=& 1 \\ mx + y - m^3 z &=& -1 \end{array}\right. \qquad (S_m)$$

1. Ecrire (S_m) sous la forme matricielle $(A_m)X = b$,où A_m est la matrice du système.

2. Utiliser des propriètés relatives au déterminant pour montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & -m^2 & 1-m^2 \\ 0 & 1+m^2 & 0 \end{vmatrix}$$

   En déduire que $|A| = -m(1+m^2)(1-m)(1+m)$
3. Pour quelles valeurs de m le système (S_m) admet-il une solution unique
4. Résoudre le système (S_2) par la méthode de Cramer
5. Trouver la matrice inverse du système (S_2) et retrouver sa solution grâce au résultat obtenu.
6. Discuter le système (S_m) dans le cas où il n'admet pas une solution unique.

SOLUTION. 5

1. $(S_m) : \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 pts}}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & -m^2 & 1-m^2 \\ m & 1 & 1-m^2 \end{vmatrix}$ où $c_3 \longrightarrow c_3 + c_2$

   $= m \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & -m^2 & 1-m^2 \\ 0 & 1+m^2 & 0 \end{vmatrix}$ où $l_3 \longrightarrow l_3 - l_2$. $\boxed{\text{3 pts}}$
3. On a $|A_m| = m(m^2-1)(m^2+1)$ $\boxed{\text{2 pts}}$ donc (S_m) admet une solution unique pour tout $m \neq -1, 0, 1$ $(|A_m| \neq 0)$. $\boxed{\text{2 pts}}$
4. On a (S_2) est de Cramer, il admet une solution unique $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. $\boxed{\text{2 pts}}$

   avec $\Delta = |A_2| = 30, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 36, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 18, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15$ $\boxed{\text{3 pts=1+1+1}}$ et donc $x = \frac{6}{5}, y = \frac{3}{5}, z = \frac{1}{2}$. $\boxed{\text{2 pts}}$
5. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, et $(A_2)^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}{}^t cof(A_2) = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & -12 & 12 \\ 20 & -16 & 6 \\ 10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{3 pts}}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & -12 & 12 \\ 20 & -16 & 6 \\ 10 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 pts}}$
6. Cas où $m = -1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right]$; $\boxed{\text{1 pts}}$ soit $y = -1 - z,\ x = -1 + 1 + z - z = 0$. Le système est sous déterminé, sa solution dépend du paramètre $z : (0, -1-z, z)$ $\boxed{\text{1 pts}}$

   Cas où $m = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$; Le système d'admet pas de solutions. $\boxed{\text{1 pts}}$

   Cas où $m = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]$ $\boxed{\text{1 pts}}$ soit $y = -1 + z,\ x =$

$1 + 1 - z - z = 2 - 2z$. Le système est sous déterminé, sa solution dépend du paramètre $z : (2 - 2z, -1 + z, z)$. $\boxed{\text{1 pts}}$