

Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Durée: 1h30
Partiel
2016-2017

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth-Baakline-Baalbek-Ghazza-
Tripoli-Bickfaya
Langue de l'examen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Partiel
Application de l'analyse à la géométrie - MVA006

1. (8 pts) On considère la fonction réelle à deux variables réelles

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ? Justifier votre réponse.
(b) Calculer $\nabla f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, i.e. le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

- (c) Calculer $\nabla f(0, 0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0))$
(d) La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ? Justifier votre réponse.
(e) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 ?

Solution:

a) (1pt) La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Elle est aussi continue en $(0, 0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0 = f(0, 0), \quad \forall \theta$$

f est donc continue sur \mathbb{R}^2

b)(1+1=2pts) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

c)(1+1=2pts) Pour $(x, y) = (0, 0)$ on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \end{cases}$$

et $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

d) (continuité f_x : 1pt; continuité f_y : 1pt; conclusion 0.5pt) On a déjà vérifié que f est continue sur \mathbb{R}^2 . Vérifions que ses dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^5(\cos \theta \sin^4 \theta)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} 2r(\cos \theta \sin^4 \theta) = 0 =$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \forall \theta$ et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue en $(0, 0)$ et comme $x^2 + y^2 \neq$

0 en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue sur \mathbb{R}^2 . Un

calcul symétrique montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est continue sur \mathbb{R}^2 et par suite f est C^1 sur \mathbb{R}^2 .

d) (0.5pt) Puisque toute fonction de classe C^1 est différentiable, on conclut que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

2. (10pts)

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par: \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow ou aucune implication

$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	<input type="checkbox"/>	(x_0, y_0) est un extrema;
$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	<input type="checkbox"/>	(x_0, y_0) est un point critique;
(x_0, y_0) est un point critique	<input type="checkbox"/>	(x_0, y_0) est un extrema
(x_0, y_0) est un point critique	<input type="checkbox"/>	(x_0, y_0) est un point de selle

- (b) Déterminer et classifier les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)}$$

Solution:

a) (0.5×4 = 2pts)

$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	\Leftarrow	(x_0, y_0) est un extrema;
$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	\Leftrightarrow	(x_0, y_0) est un point critique;
(x_0, y_0) est un point critique	\Leftarrow	(x_0, y_0) est un extrema
(x_0, y_0) est un point critique	\Leftarrow	(x_0, y_0) est un point de selle

b) (dérivées premières 0.5×2 = 1pt) + (pts critiques: 0.5×5 = 2.5pts) + (A, B, C, D : 0.5×4 = 2pts) + (nature des points 0.5×5 = 2.5pts) Un point (x, y) est un point critique de f si $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} 2x(1 - x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2} = 0 \\ 2y(-1 - x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2} = 0 \end{cases}$$

et les points critiques de f sont

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$$

On a

$$\begin{cases} A = f_{xx}(x, y) = 2e^{-x^2 - y^2}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2) \\ C = f_{xy}(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2} \\ B = f_{yy}(x, y) = 2e^{-x^2 - y^2}(-1 - x^2 + 5y^2 - 2y^4 + 2x^2y^2) \\ D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 \end{cases}$$

On a alors

pts critiques	A	C	B	D	nature
(0, 0)	2	0	-2	-4	point de selle
(1, 0)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	max
(-1, 0)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	max
(0, 1)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	min
(0, -1)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	min

3. (10pts) Soit D le domaine définie par:

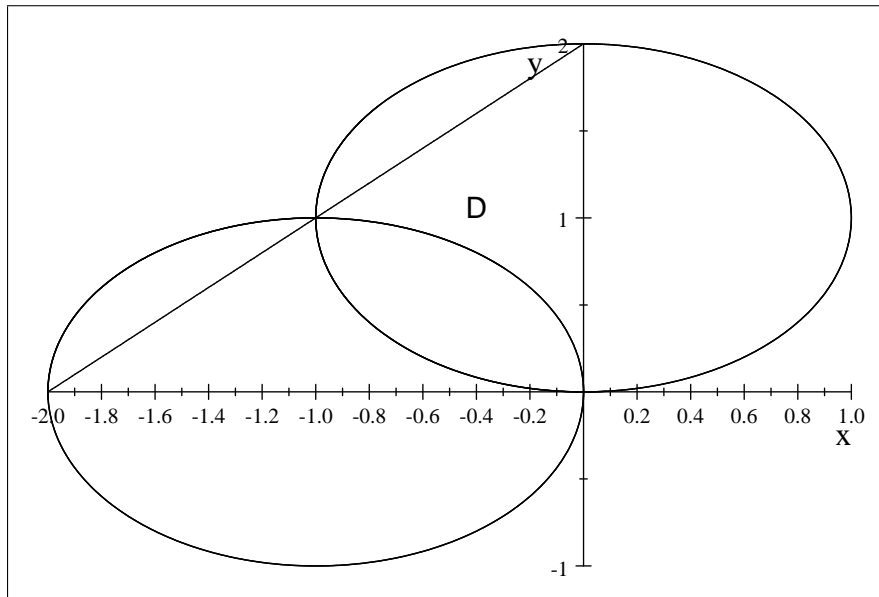
$$D : \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \\ y \leq x+2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Dessiner le domaine D

(b) Calculer l'aire de D en utilisant les coordonnées polaires (Hint: On donne $\int \frac{dx}{1-\sin 2x} = -\frac{1}{\tan x - 1}$)

Solution:

a) (3pts)

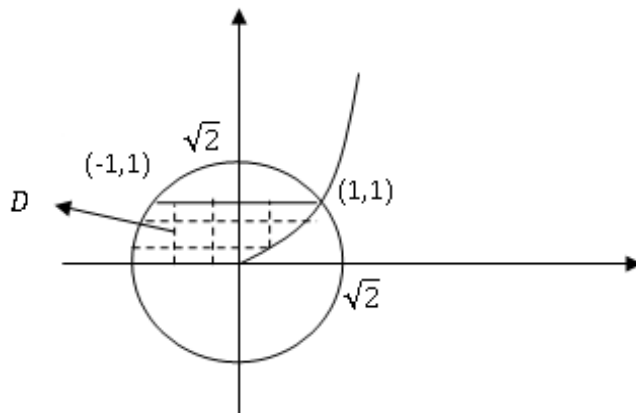


b) (eqtions polaire (c_2) : 1pt et (Δ) : 1pt) + (0.5 pour chaque bord de $I = 2$ pts) + (transfert vers une integrale simple: 1pts) + (primitive et calcul 2pt) $A = \int \int_D dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_{(c_2)}^{(\Delta)} r dr$ avec

$$\begin{aligned} (c_2) : r &= -2 \cos \theta \\ (\Delta) : r &= \frac{2}{\sin \theta - \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{-2\cos\theta}^{\frac{2}{\sin\theta - \cos\theta}} d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{(\sin\theta - \cos\theta)^2} d\theta - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta \\
A &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\theta}{1 - \sin 2\theta} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\
&= 2 \left[-\frac{1}{\tan\theta - 1} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

4. (4pts) Soit D le domaine représenté par la région quadrillée; limité par le cercle de centre o et de rayon $\sqrt{2}$, la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite $y = 1$



En utilisant les coordonnées cartésiennes, écrire de deux façons différentes l'intégrale $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

Solution:

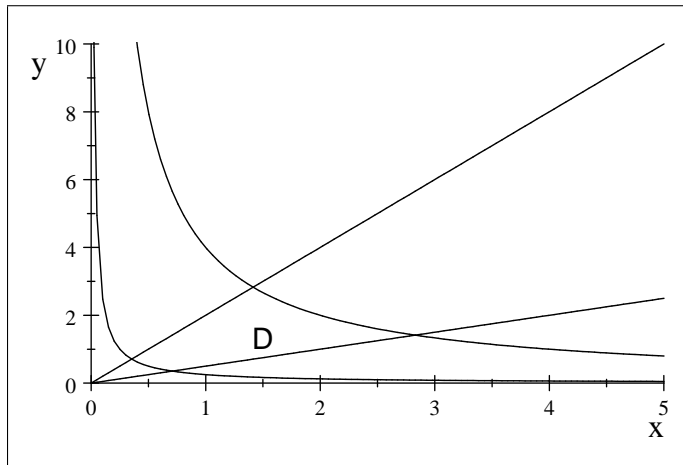
1^{ière} façon: (2.5pts)

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy$$

2^{ième} façon: (1.5 pt)

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

5. (8pts) Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 limité par $D : \begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4x} \end{cases} \quad x > 0$



Utiliser le changement de variables: $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$ pour calculer $I = \iint_D dx dy$

Solution: (Passage du domaine (x, y) au domaine (u, v) : 4pts) + (jacobien:2pts)+(calcul sur le nouveau domaine 2pts) On a

$$\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = uv \end{cases}$$

ainsi sur le domaine D on a u, v sont du même signe, on peut donc poser

$$\begin{cases} u = \sqrt{xy} \\ v = \sqrt{\frac{y}{x}} \end{cases}$$

Pour tout $(x, y) \in D$ on a

$$\frac{x}{2} \leq y \leq 2x \quad \text{et} \quad \frac{1}{4x} \leq y \leq \frac{1}{4}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \leq xy \leq 1$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \leq v^2 \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \leq u^2 \leq 4$$

ainsi $(x, y) \in D$ si et seulement si $(u, v) \in [\frac{1}{2}, 2] \times [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$. D'autre part, le jacobien

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 2 \frac{u}{v}$$

Ainsi par Fubini

$$\begin{aligned} I &= 2 \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 u du \right) \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{v} dv \right) \\ &= \frac{15}{4} \ln 2 \end{aligned}$$
