Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam Liban

Application de l'analyse à la géométrie (MVA006)

Partiel 2018-2019 **1h :30**

Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour le centre de Beyrouth et les antennes regionales

Exercice 1 (*20 points*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$
2. Calculer les premières dérivées partielles de f au point $(x,y) \neq (0,0)$
3. Calculer les premières dérivées partielles de f au point $(0,0)$
4. Etudier la continuité des dérivées partielles premières au point $(0,0)$

SOLUTION. 1

1. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a $x^2+y^2 \neq 0$ et donc f est continue en (x,y). $\boxed{\text{2pts}}$
   Au point $(0,0)$ on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} r^2 \sin(\frac{1}{r^2}) = 0 = f(0,0)$, $\forall\theta$ où $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. ($\sin\frac{1}{r^2}$ étant bornée). Ainsi f est continue en $(0,0)$ et parsuite f est continue sur $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{5pts}}$
2. $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \boxed{\text{2+2=4pts}}$$
3. $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{2+2=4pts}}$$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{r\to 0}[2r\sin\frac{1}{r^2}\cos\theta - \frac{2}{r}\cos\theta\cos\frac{1}{r^2}] = \infty$ sur le chemin $\theta = 0$ et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas égale à $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ pour tout chemin menant (x,y) à $(0,0)$ et parsuite $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ et par symétrie $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$. $\boxed{\text{5pts}}$

Exercice 2 (*20 points*) : On considère la fonction de deux variables $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

1. Déterminer les trois points critiques de f
2. Déterminer la nature de chacun d'eux
3. Montrer que, parmi ces points, on a des extremums globaux

SOLUTION. 2

1. Les points critiques de f sont donnés par

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{1pts}}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y & = & 0 \\ 4y^3 - 4x & = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{2pts}}$$

ainsi $x = y^3$ et $y^9 - y = 0$ c'est à dire $y(y^8 - 1) = 0$. On obtient

$$\begin{cases} y = 0 \text{ donc } x = 0 \\ y = 1 \text{ donc } x = 1 \\ y = -1 \text{ donc } x = -1 \end{cases}$$

Les points critiques de f sont $O(0,0), M(1,1)$ et $N(-1,-1)$. $\boxed{\text{3pts}}$

2. $A = f''_{xx} = 12x^2,\ B = f''_{yy} = 12y^2, C = f''_{xy} = -4$ et $D = AB - C^2 = 144x^2y^2 - 16.$ $\boxed{\text{4x1=4pts}}$

$$\begin{aligned} D(O) &= -16 < 0 \text{ donc } O \text{ est un point de selle} \\ D(M) &= D(N) = 128 > 0 \text{ et } A(M) = A(N) = 12 > 0 \text{ donc } M \quad \text{et } N \text{ sont deux minimum locaux} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2+2+2=6pts}}$

3. $f(M) = f(N) = -2$; Pour tout (x,y) ona :

$$f(x,y) - f(M \text{ ou } N) = x^4 + y^4 - 4xy + 2.$$

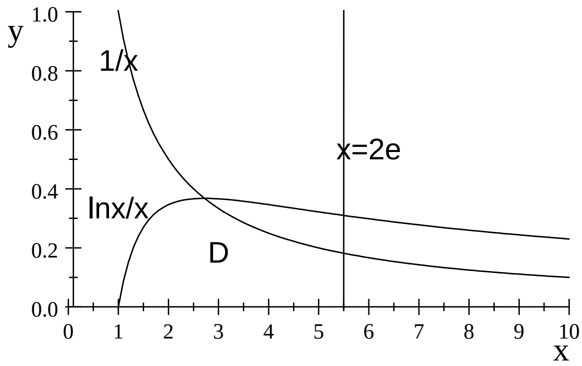
On a $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ donc $-4xy \geq -2x^2 - 2y^2$. ainsi

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(M) &\geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2 \\ f(x,y) - f(M) &\geq (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Parsuite M et N sont deux minimum globaux. $\boxed{\text{4pts}}$

Exercice 3 (*20 points*) : On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ 0 < y < \frac{\ln x}{x},\ y < \frac{1}{x},\ \ x < 2e\}$$



Calculer l'aire de D.

SOLUTION. 3

es deux courbes se croisent au point $x = e$ et $\frac{\ln x}{x} = 0$ pour $x = 1$. $\boxed{\text{2pts}}$ On a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D) &= \int\int_D dxdy = \int_1^e dx \int_0^{\frac{\ln x}{x}} dy \ + \int_e^{2e} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \quad \boxed{\text{8pts}}\\ &= \int_1^e (\ln x)\frac{1}{x}dx \ + \int_e^{2e} \frac{1}{x}dx \ \boxed{\text{5pts}}\\ &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e + [\ln x]_e^{2e} \ \boxed{\text{3pts}}\\ \mathcal{A}(D) &= \frac{1}{2} + (\ln 2) \quad \boxed{\text{2pts}}\end{aligned}$$

Exercice 4 (*20 points*) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

1. Montrer que D est un disque et déterminer son centre et son rayon
2. Calculer $\int\int_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$

SOLUTION. 4

1. On a $x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ et D est le disque de centre $(1, 0)$ et de rayon $R = 1$ $\boxed{\text{2pts}}$
2. $I = \int\int_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{(c)} r.rdr$ $\boxed{\text{2pts}}$ où $(c) : (x-1)^2 + y^2 = 1$ c'est à dire $r^2 - 2r\cos\theta = 0$ donc $r = 2\cos\theta$ $\boxed{\text{2pts}}$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta \quad \boxed{\text{6pts}}\\ &= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \quad \boxed{\text{2pts}}\\ &= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta)d(\sin\theta) \ \boxed{\text{2pts}}\\ &= \frac{32}{9} \quad \boxed{\text{4pts}}\end{aligned}$$

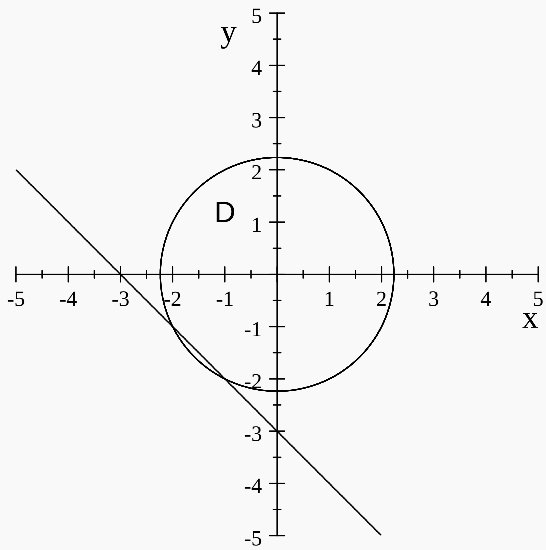
Exercice 5 (*20 points*) Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ contenant O limité par le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$ et la droite d'équation $y = -x - 3$. Adopter le changement de variables

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \text{ et } v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

pour calculer $\int\int_D (x + y)dxdy$
(IND : Ecrire l'équation de la droite et l'équation du cercle dans le nouveau repère (u, v)).

SOLUTION. 5

oici le domaine D



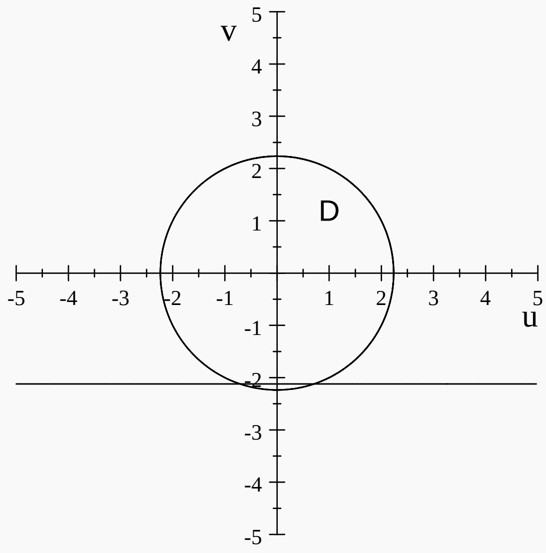
On a

$$x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u + v)^2 + \frac{1}{2}(v - u)^2 = 5 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 5 \qquad \boxed{\text{2pts}}$$

Aussi,

$$x + y = -3 \Leftrightarrow v = -\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{\text{2pts}}$$

Le point O du repère xOy correspond au point O du repère uOv et le domaine devient $u^2 + v^2 = 5$ $\boxed{\text{1pts}}$



On a $J = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1.$ $\boxed{\text{2pts}}$ Ainsi :

$$I \overset{\boxed{\text{8pts}}}{=} \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{5}} dv \int_{-\sqrt{5-v^2}}^{\sqrt{5-v^2}} \sqrt{2} v du = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{5}} \left[\sqrt{5-v^2}\right] v dv \overset{\boxed{\text{3pts}}}{=} -\sqrt{2} \left[\frac{(5-v^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{5}} =$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{3} \quad \boxed{\text{2pts}}$$