MVA006: Solution du Final 20-21

Sunday, July 18, 2021 12:03 PM

Exercice 1 (*15 points*) : On considère la fonction de deux variables $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

1. Déterminer les points critiques de f
2. Déterminer la nature de chacun d'eux
3. On propose de regarder la nature du point $(0,0)$ à partir de deux chemins : Déterminer la nature du point $(0,0)$ lorsqu'on se deplace d'abord sur le chemin $y = x$ et puis sur le chemin $y = -x$. Commenter !

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x^2$ (2pts) $\Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ donc $y = 0$ ou $x = 1 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ sont les pts critiques de f (2pts)

2) $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$; $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$; $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$

$D = AB - C^2 = 36xy - 9$ (1+1+1+1=4pts)

$D(M_1) = -9 < 0 \Rightarrow M_1(0,0)$ est un pt selle (1pt)

$D(M_2) = 27 > 0$ et $A = 6 > 0 \Rightarrow M_2$ est un min local. (1pt)

3) Si $y = x$; $g(x) = f(x,x) = 2x^3 - 3x^2$ (1pt)

$g'(x) = 6x^2 - 6x$

x		0		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$(0,0)$ est vu à partir de ce chemin comme un max (1pt)

Si $y = -x$; $h(x) = f(x,-x) = 3x^2$ (1pt)

$h'(x) = 6x$

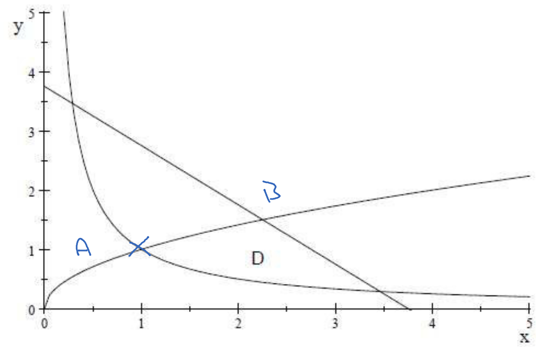
x		0	
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$(0,0)$ est vu à partir de ce chemin comme un minimum (1pt)

Conclusion : on a trouvé dans un voisinage fondamental de $(0,0)$ deux chemins passant par $(0,0)$, sur l'un $f(0,0)$ est un max et sur l'autre $f(0,0)$ est un min donc $(0,0)$ est un pt selle. (1pt)

Exercice 2 (*18 points*) : On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ limité par :

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} & (C_1) \\ y = \frac{1}{x} \quad , x > 0 & (C_2) \\ y = -x + \frac{15}{4} & (C_3) \end{cases}$$



Calculer l'aire de D.

$(C_1) \cap (C_2) = A$: $\frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ et $A(1,1)$ (2pts)

$(C_1) \cap (C_3) = B$: $\sqrt{x} = -x + \frac{15}{4} \Rightarrow x + \sqrt{x} - \frac{15}{4} = 0$

$X = \sqrt{x} \geq 0$: $X^2 + X - \frac{15}{4} = 0$

$\Delta = 1 + 15 = 16 \Rightarrow X = \frac{-1+4}{2} = 3/2 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

$B\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$ (2pts)

$(C_2) \cap (C_3) = C$: $\frac{1}{x} = -x + \frac{15}{4} \Rightarrow -x^2 + \frac{15}{4}x - 1 = 0$

$\Delta = \frac{225}{16} - 4 = \frac{161}{16}$

$x = \frac{-\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{161}}{4}}{-2} = \frac{15 + \sqrt{161}}{8} = 3.46$

$\Rightarrow C\left(\frac{15+\sqrt{161}}{8}, \frac{8}{15+\sqrt{161}}\right)$. (2pts)

$$A(D) = \iint_D dx\,dy = \int_1^{9/4} dx \int_{1/x}^{\sqrt{x}} dy + \int_{9/4}^{3.46} dx \int_{1/x}^{-x+15/4} dy$$ (8pts)

$$= \int_1^{9/4} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{9/4}^{3.46} \left(\frac{1}{x} + x - \frac{15}{4}\right) dx$$ (1pt)

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \ln x\right]_1^{9/4} + \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - \frac{15}{4}x\right]_{9/4}^{3.46}$$ (1pt)

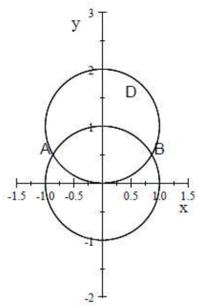
(1pt)

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} - \ln x \Big]_1 + \ln x + \frac{x}{2} - \frac{\cdot}{4}x \Big]_{9/4}$$

$$= \left(0.949 - \ln 9/4 - \frac{2}{3}\right) + \left(\ln 3.46 - 5.58 - 12.975\right)$$
$$- \left(\ln 9/4 + 2.53 - 8.43\right) =$$ (2pts)

Exercice 3 (*20 points*) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$

1. Justifier que D est donné par la figure suivante



2. Déterminer les coordonnées des points A et B, intersection des deux cercles
3. Préciser les angles polaires qui correspondent à A et B.
4. Calculer $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$

1) $x^2+y^2 \geq 1$ c'est le domaine à l'extérieur du cercle $C(O,1)$ (2pts)

$x^2+y^2 \leq 2y \iff x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ c'est le domaine à l'intérieur du cercle $C((0,1),1)$ (2pts)

2) $(C_1) \cap (C_2)$: $1 = 2y \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4} = 3/4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}/2$

$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2\right)$ (2pts)

3) Soit θ_1 l'angle polaire de B : $\sin\theta_1 = \frac{1}{2}$; $\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \pi/6$ (2pts)

θ_2 - - - - - - A : $\sin\theta_2 = \frac{1}{2}$; $\cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_2 = \pi - \pi/6 = \frac{5\pi}{6}$. (2pts)

4) $I = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta \int_{(C_1)}^{(C_2)} r \cdot r \, dr$ (2pts) (C_2) : $r^2 = 2r\sin\theta$ c-à-d $r = 2\sin\theta$ (2pts)

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta \int_1^{2\sin\theta} r^2 dr$$ (2pts) $$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\frac{8\sin^3\theta}{3} - \frac{1}{3}\right) d\theta$$ (2pts)

$$= \frac{8}{3} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\cos^2\theta - 1) \, d(\cos\theta) - \frac{1}{3}\left[\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{8}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{8}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_{\pi/6} - \frac{1}{3}\frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{8}{9}\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) - \frac{8}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2\pi}{9}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{9} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{9}\pi = 2.76$$ (2pts)

Exercice 4 (*14 points*)

1. Déterminer les points d'infléxion de l'arc paramétré $((t-2)^3, t^2-4)$
2. Déterminer la nature au point $t=0$ de l'arc paramétré $(-t^2-2t^3, -t^3-t^5)$

1) $M(t)$ est un pt d'inflexion donc $\vec{F}'(t) \parallel \vec{F}''(t)$ c.à.d

(1pt) $\begin{vmatrix} 3(t-2)^2 & 2t \\ 6(t-2) & 2 \end{vmatrix} = 0$ c.à.d $6(t-2)^2 - 12t(t-2) = 0$

$6(t-2)[t-2-2t] = 0$

$t_1 = 2$, $t_2 = -2$ (1pt)

$\vec{F}'(2) = 4\vec{j}$ $(p=1)$; (1pt)

$\vec{F}'''(2) = 6\vec{i}$. $(q=3)$ (1 pt)

p, q impairs $\Rightarrow M(2)$ est un pt d'inflexion (1pts)

(1pt)

$\vec{F}'(-2) = 48\vec{i} - 4\vec{j} \neq \vec{0}$ et $(p=1)$

$\vec{F}'''(-2) = 6\vec{i} \neq \vec{0}$ et non // à $\vec{F}'(-2)$

donc $q=3$ (1 pt)

p, q impairs donc $M(-2)$ est un pt d'inflexion (1pt)

2) $\vec{F}'(t) = (-2t - 6t^2)\vec{i} + (-3t^2 - 5t^4)\vec{j}$

$\vec{F}'(0) = \vec{0}$ et $M(0)$ est un pt critique. (1 pt)

$\vec{F}''(t) = (-2 - 12t)\vec{i} - (6t + 20t^3)\vec{j}$ (1 pt)

$\vec{F}''(0) = -2\vec{i} \neq \vec{0}$ et $(p=2)$ (1pt)

$\vec{F}'''(t) = -12\vec{i} - (6 + 60t^2)\vec{j}$ (1 pt)

$\vec{F}'''(0) = -12\vec{i} - 6\vec{j} \neq \vec{0}$ et non // avec $\vec{F}''(0)$, $(q=3)$ (1pt)

(p pair, q impair) $\Rightarrow M(0)$ est un pt de rebroussement de 1ère espèce (1pt)

Exercice 5 (18 points) Soit $\rho(\theta) = \cos 2\theta + \cos^2\theta$

1. Le domaine de $\rho(\theta)$ est $\mathbb{R}$ mais pour construire son graphe on peut étudier ρ sur un domaine plus réduit :

   (a) Vérifier que $\rho(\theta)$ est $\pi-$ périodique et justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ grâce à une symétrie à préciser.

   (b) Le fait que $\rho(\theta)$ est $\pi-$ périodique, cela se traduit par une symétrie de la courbe de $\rho(\theta)$. Quelle est cette symétrie.

2. Pour quelle valeur $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ a-t-on $\rho(\theta_0) = 0$? (Exprimer le résultat avec la fonction arccos).

3. Dresser le tableau de variation de ρ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

4. Tracer la courbe (C) de $\rho(\theta)$ et préciser les tangentes verticales et horizontales (en les justifiant)

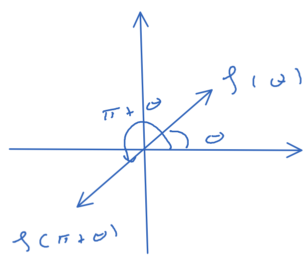
1-a) $f(\pi+\theta) = \cos(2\pi+2\theta) + \cos^2(\pi+\theta) = \cos 2\theta + (-\cos\theta)^2$

$= \cos 2\theta + \cos^2\theta = f(\theta)$ et f est $\pi-$ périodique.

Soit $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (2pts)

$f(-\theta) = f(\theta)$ donc $x'x$ axe de symétrie et $D = [0, \pi/2]$ (2pts)

b) $f(\pi+\theta) = f(\theta)$ veut dire que $O(0,0)$ est un centre de symétrie



(2pts)

2) $f(\theta_0) = 0 \iff \cos 2\theta_0 + \cos^2\theta_0 = 0$

$2\cos^2\theta_0 - 1 + \cos^2\theta_0 = 0$

$3\cos^2\theta_0 = 1 \Rightarrow \theta_0 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, \pi/2]$ (2pts)

3) $f'(\theta) = -2\sin 2\theta - 2\cos\theta\sin\theta = -3\sin 2\theta$ (2 pts)

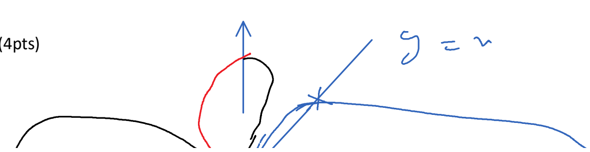
$0 \leq 2\theta \leq \pi$

$f'(\theta) = 0$ si $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$

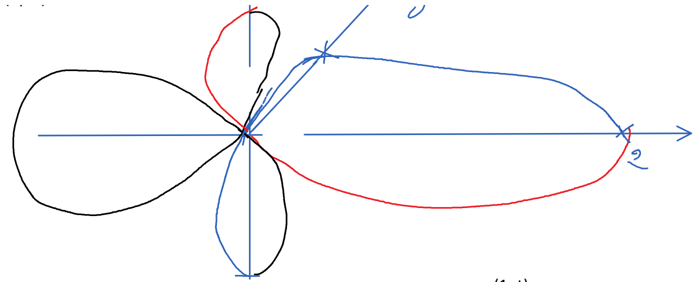
$f'(\theta) < 0$ si $0 < 2\theta < \pi$ c.à.d $0 < \theta < \pi/2$

θ	0	$\pi/4$	θ_0	$\pi/2$
$f'(\theta)$	0	$-$		0
$f(\theta)$	0			

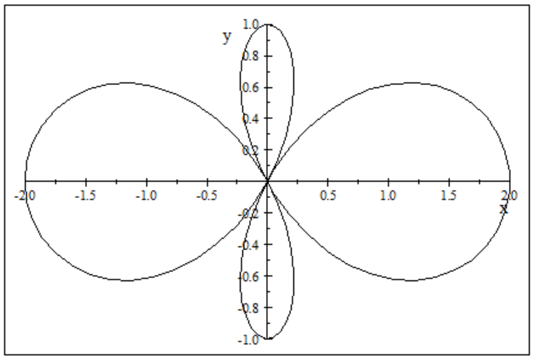
(4pts)



$\rho'(\theta)$	0	—		0
$\rho(\theta)$	2	$\searrow$ $\frac{1}{2}$	0	-1



(2pts) (1pt)



bleue $\longrightarrow$ rouge par symétrie par rapport à $x'x$

$\longrightarrow$ noire par symétrie par rapport à O.

(1pt)

il est clair que les tangentes verticales sont $x = \pm 2$
et les tangentes horizontales sont $y = \pm 1$

<u>Justification:</u>

$(2,0)$ correspond à $\theta = 0$

$\alpha = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{T_{M_0}})$: $\tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'}(0) = \infty \Rightarrow \alpha = \pi/2$

et la tangente est verticale. par symétrie par rapport à O, la tangente est verticale au point $(-2,0)$. (1pt)

au pt $(0,-1)$, $\theta = \pi/2$ la tangente est horizontale.

$\tan\alpha = \infty \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ c.a.d $(T) \perp \overrightarrow{OM}$ avec $M(0,-1)$ donc

(T) est horizontale et par symétrie par rapport à O, la tangente en $(0,1)$ est horizontale. (1pt)

Exercice 6 (15 points)

1. Utiliser la méthode d'échelonnement de Gauss pour discuter et résoudre selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + y - z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= m \\ x + y - z &= 1 \end{cases}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. A votre avis quelle est la valeur du déterminant de A? Justifer.
3. Retrouver la valeur de $|A|$ par le calcul.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. A votre avis quelle est la valeur du déterminant de A? Justifer.
3. Retrouver la valeur de $|A|$ par le calcul.

1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 3m-1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 3l_2 - l_1 \\ 3l_3 - l_1 \end{array}$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 3m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 14+2(3m-1) \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 7l_3 + 2l_2 \end{array}$ (5pts)

le système admet des solutions si $6m+12=0$ c.à.d $m=-2$ (2pts)

Dans ce cas le système est sous déterminé :

$7y = 7z+7$, $y = z+1$; $3x = 1-(z+1)+z$

$x = 0$

$S = \{(0, z+1, z) / z \in \mathbb{R}\}$. (3pts)

2) $rg(A) = 2 < 3 = ordre(A)$ donc $|A| = 0$. (2pts)

3) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (3pts)