

Ex1

(2pts) (2pts)

$$a) \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0,0) \Leftrightarrow (2x, -2y) = (0,0)$$

(b) $(x,y) = (0,0)$ est le seul point critique (2pts)

$$b) f(x,y) = -y^2 \leq 0, f(x,0) = x^2 \geq 0 \quad (2+2=4pts)$$

Donc $\forall V$ un voisinage de $(0,0)$, $\forall (x,y) \in V$

$f(x,y) - f(0,0)$ n'a pas de signe fixe et $(0,0)$ est un point de selle (2pts)

$$c) A = f''_{xx} = 2, B = f''_{yy} = -2, C = f''_{xy} = 0$$

$$D = AB - C^2 = -4 < 0 \text{ donc } (0,0) \text{ est un point de selle} \quad (2pts)$$

Ex2:

$$a) \vec{F}'(t) = (1 + 4t - 3t^2) \vec{i} + (1 + 4t - 7t^2) \vec{j} \quad (2pts)$$

$$\vec{F}'(t) = (4 - 6t) \vec{i} + (4 - 42t^2) \vec{j} \quad (2pts)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{F}'(0) \\ \vec{F}''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } t=0 \text{ est un pt critique} \quad (2pts)$$

$$\vec{F}'(0) = \vec{i} + \vec{j} \neq \vec{0} \text{ donc } p=1 \quad (1)$$

$$\vec{F}''(0) = 4(\vec{i} + \vec{j}) \neq 0 \text{ mais } \parallel \vec{F}'(0)$$

(1) $\vec{F}'''(t) = -6\vec{i} - 210t^2\vec{j}$, $\vec{F}'''(0) = -6\vec{i} \neq \vec{0}$ non parallèle à $\vec{F}'(0)$ donc $q=3$ et $t(0) = (0,0)$ est un pt d'inflexion (1)

$$b) F'(t) = (-1+2t)\vec{i} + (3t^2+2t)\vec{j} \quad (2pts) \quad (2)$$

$$F''(t) = (2\vec{i}) + (6t+2)\vec{j} \quad (2pts)$$

$$\begin{vmatrix} F'(0) \\ F''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ donc } \alpha(0) = (0,0) \text{ est un} \quad (2pts)$$

point ordinaire

Ex3 $r(\theta)$ est de période $\frac{2\pi}{2} = \pi$, $r(\theta)$ peut être (3)

étudier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cap \{0 \mid \cos 2\theta \geq 0\}$. (3)

$r(-\theta) = r(\theta)$ donc $r(\theta)$ peut être étudié sur (3)

$[\frac{\pi}{2}, 0] \cap \{0 \mid \cos 2\theta \geq 0\}$ c'est $\mathcal{D} = [\frac{\pi}{4}, 0]$. (3)

1) r est un axe de symétrie (2)

2) $r(\theta)$ est de période π donc θ est un centre de symétrie. (2)

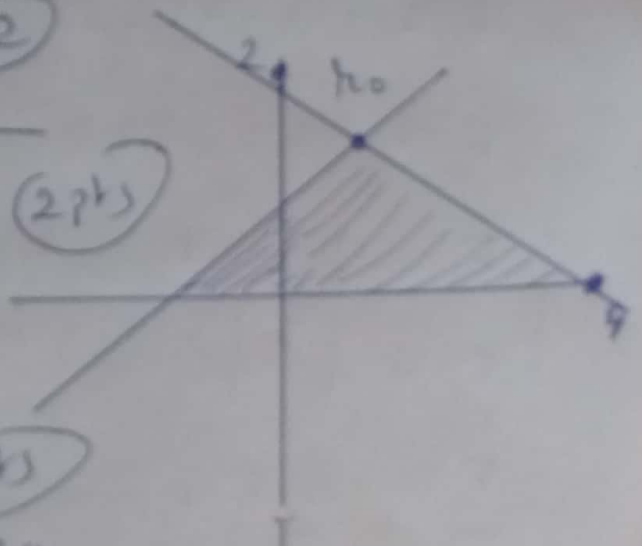
Ex4 :

$$(D_1) : x - y = -1$$

$$(D_2) : x + 2y = 4$$

$$3y = 5 \Rightarrow y = 5/3. \quad (2pts)$$

$$I = \int_0^{5/3} dy \int_{D_1}^{D_2} x dx = \int_0^{5/3} dy \int_{y-1}^{4-2y} x dx \quad (10pts)$$



(3)

$$I_2 = \int_0^{5/3} \frac{1}{2} [(4-2y)^2 - (y-1)^2] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{5/3} (16 + 4y^2 - 16y - y^2 - 1 + 2y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{5/3} (15 + 3y^2 - 14y) dy = \frac{1}{2} [15y - y^3 - 7y^2]_0^{5/3} = \text{---}$$

(4 pts)

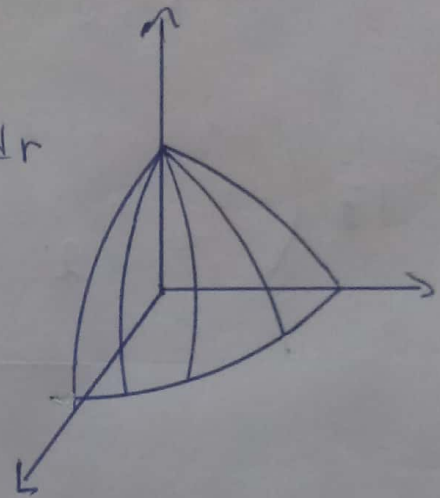
Ex 5

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r \cos\theta \sin\varphi r^2 \sin\varphi dr$$

(8 pts)

or

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$



$$I = \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr$$

(2 pts)

$$= \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} \times \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi \times \frac{1}{4}$$

(4 pts)

$$= 1 \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \left(+\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{16}$$

(2 pts)

(4)

5x6

$$|A| = (3 - 12) - 2(6 - 9) - 4(-8 + 3)$$

$$= -9 + 6 + 20 = 17 \neq 0, \text{ et } A \text{ est inversible.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ w.f.}(A).$$

(4pts)

(2pts)

$$\text{w.f.}(A) = \begin{pmatrix} +(-9) & -(-3) & +(-5) \\ -10 & +9 & -(-2) \\ +2 & -(-5) & +3 \end{pmatrix}$$

(8pts)

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -9 & -10 & 2 \\ 3 & 9 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2pts)