Institut des Sciences

Appliquées et Économiques

ISAE – Cnam Liban

Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date: 16 Juillet 2012–Durée: 3h00

2nd Semestre - 2ième Session

2011 – 2012

Sujet coordonné par: ***Ibrahim Ismail.***

Proposé pour les centres d'enseignement de: Beyrouth – Baalbek – Ghazza – Tripoli – Bickfaya – Baaklin – Nahr Ibrahim.

Langue de l'examen : Français

Calculatrice non programmable autorisée. Documents non autorisés.

Examen Final :

Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire – MVA 006

Consignes particulières aux candidats: *Le sujet comporte 2 pages. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Exercice 1: (2,5 points)

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par: $f(x,y)=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

1-Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f .

2-Montrer que f admet un seul point critique que l'on déterminera.

3- f admet-elle un extrémum en ce point ?

Exercice 2: (3,5 pts)

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t^2}-2t\right) \\ y(t)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t^2}+16t\right) \end{cases}$ où le paramètre t varie dans $\mathbb{R}^*$

1-Etudier les branches infinies de la courbe (C) . On précisera la position relative de (C) par rapport à ses asymptotes.

2-Calculer $x'(t),\ y'(t),\ x''(t),\ y''(t)$ pour $t\in\mathbb{R}^*$.

3-Dresser le tableau de variations des fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sur $\mathbb{R}^*$.

4-La courbe (C) admet-elle des points singuliers ?

5-Dessiner la courbe (C) et ses asymptotes. On précisera les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées.

Exercice 3: (2,5 pts)

Soit Γ la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par : $\rho(\theta)=2(1-\cos(\theta))$.

1-Montrer Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.

2-Calculer l'aire de la région intérieure D limitée par la courbe Γ .

3-Calculer l'intégrale curviligne: $I=\oint_\Gamma -ydx+dy$ où Γ est traversée dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 4: (6 pts)

Calculer les intégrales suivantes :

$a)$ $I=\iint_D ye^{-x}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 2x\le y\ \}$.

$b)$ $J=\iint_D \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x\le x^2+y^2\le 1\}$

$c)$ $K=\iint_D (x-y)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1\}$.

$d)$ $L=\iiint_\Omega xyzdxdydz$ où $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\le x\le y\le z\le 1\}$.

Exercice 5: (1 pt)

Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du domaine du plan défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1, \ |y| < x\}$ considéré comme une plaque homogène.

Exercice 6: (1,5 pt)

Calculer le volume de la région de l'espace définie par : $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ \ x^2 + y^2 \leq 1, \ \ z \geq 0\}$

Exercice 7: (3 pts)

On considère les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1-Calculer les matrices AB et AC. En déduire si A est inversible ou pas.

2-Montrer que la matrice C est inversible et calculer C^{-1}.

3-Trouver les matrices X et Y telles que : $AX = O$ et $CY = B$ (O est la matrice nulle 3x3)

4-Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ -y - z = 1 \end{cases}$$