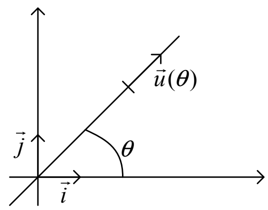
Chapitre 12 : Courbes d'équation $\rho = f(\theta)$ en coordonnées polaires

I Préliminaire

Ici, $\mathfrak{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté, $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\vec{u}(\theta) = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$.



Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$. M admet le système de coordonnées polaires $(\rho, \theta) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}(\theta)$.

Ainsi, M est sur la droite $(O, \vec{u}(\theta))$, et $OM = |\rho|$.

$\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}(\theta)$ sont de même sens si et seulement si $\rho \geq 0$.

Soit I un intervalle infini de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 au moins.

La courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ dans $\mathfrak{R}$, c'est

$C = \{M \in \mathfrak{P}, \exists \theta \in I, \overrightarrow{OM} = f(\theta).\vec{u}(\theta)\}$

C'est donc le support de l'arc paramétré $\theta \mapsto M(\theta)\begin{vmatrix} f(\theta)\sin\theta \\ f(\theta)\cos\theta \end{vmatrix}$.

Rappel :

$\theta \mapsto \vec{u}(\theta)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta}(\theta) = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j} = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$, noté $\vec{v}(\theta)$.

Et, par récurrence, $\dfrac{d^k\vec{u}}{d\theta^k}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{k\pi}{2})$.

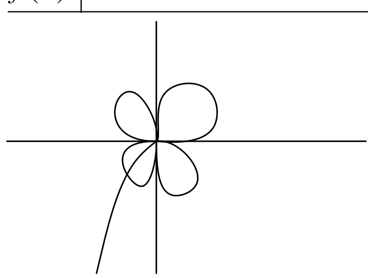
La donnée de θ et du signe de ρ donne l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$, ce qui suffit quasiment à tracer la courbe (ou du moins l'allure).

Exemple : $C : \rho = f(\theta), \theta \in [0, \frac{5\pi}{2}[$.

Données :

f est de classe C^1, et on a le tableau de signes :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$
$f(\theta)$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖



II Réduction de l'intervalle d'étude

On considère une courbe $C : \rho = f(\theta), \theta \in \mathbb{R}$. Divers exemples :

- Si il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + 2k\pi) = f(\theta)$, alors $M(\theta + 2k.\pi) = M(\theta)$, puisque $\overrightarrow{OM}(\theta + 2k.\pi) = f(\theta + 2k.\pi).\vec{u}(\theta + 2k.\pi) = f(\theta).\vec{u}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta)$.

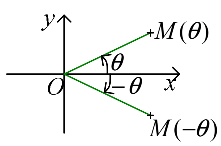
On obtient ainsi tout C pour θ décrivant un intervalle d'amplitude $2k.\pi$.

- Si il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi + 2k\pi) = -f(\theta)$:

$$\overrightarrow{OM}(\theta + \pi + 2k.\pi) = f(\theta + \pi + 2k.\pi).\vec{u}(\theta + \pi + 2k.\pi) = -f(\theta).(-\vec{u}(\theta)) = \overrightarrow{OM}(\theta)$$

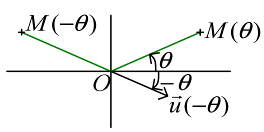
On obtient donc encore tout C avec un intervalle d'amplitude $\pi + 2k.\pi$.

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = f(\theta)$



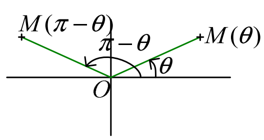
On obtient alors C en se limitant à $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}^-$), et en opérant sur la courbe obtenue une symétrie d'axe Ox

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = -f(\theta)$



On obtient tout C en se limitant à $\mathbb{R}^+$ puis en faisant une symétrie d'axe Oy.

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\pi - \theta) = f(\theta)$

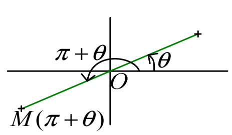


Idem que précédemment, avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ (ou $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$)

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\pi - \theta) = -f(\theta)$

On obtient C en se limitant à $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, puis en faisant une symétrie d'axe Ox.

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\pi + \theta) = f(\theta)$



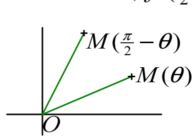
On dessine sur un intervalle d'amplitude π, puis on fait une symétrie par rapport à O.

- Autres cas plus variés :

Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \frac{\pi}{2}) = f(\theta)$:

On dessine sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis on fait une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (3 fois) et de centre O.

Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\frac{\pi}{2} - \theta) = f(\theta)$:



On fait l'étude pour $\theta \in \left]-\infty, \frac{\pi}{4}\right]$, puis une symétrie par rapport à la première bissectrice.

Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta+2\pi) = 2f(\theta)$:

On étudie sur un intervalle d'amplitude 2π, puis on fait toutes les homothéties de centre O et de rapport $2^k, k \in \mathbb{Z}$.

Exemples, construire les courbes :

$C_n : \rho = \sin(n.\theta), n \in \mathbb{N}$

$C'_n : \rho = \sin(\frac{\theta}{n}), n \in \mathbb{N}^*$

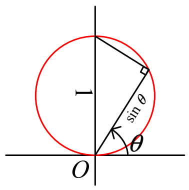
Pour les C_n, on peut se limiter à un intervalle d'amplitude 2π.

- Pour $n = 1$: on se restreint à $[-\pi, \pi]$

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: On peut se limiter à $[0, \pi]$, puis on fait une symétrie d'axe Oy

$\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$; rien de mieux.

On obtient un cercle :



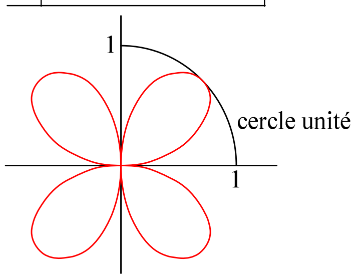
- Pour $C_2 : \rho = \sin(2.\theta)$:

$\rho(2\pi + \theta) = \rho(\theta)$. On peut donc se restreindre à $[-\pi, \pi]$.

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: Etude sur $[0, \pi]$, puis symétrie d'axe Oy.

$\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$: Etude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis une symétrie d'axe Ox donne sur $[0, \pi]$.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$+$	1	$+$	0



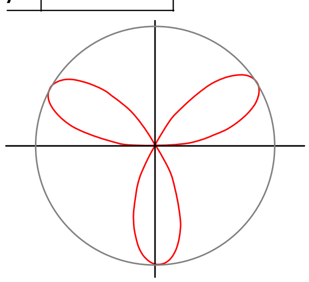
- Pour $C_3 : \rho = \sin(3.\theta)$:

$\rho(2\pi + \theta) = \rho(\theta)$: Etude sur un intervalle d'amplitude 2π.

$\rho(\frac{2\pi}{3} + \theta) = \rho(\theta)$: Etude sur un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$, puis 2 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre O.

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: Etude sur $[0, \frac{2\pi}{6}]$, puis symétrie d'axe Oy donne la courbe sur $[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$
ρ	0	$+$	0

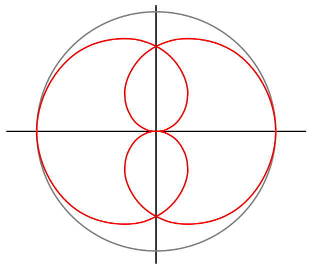


- $C'_2 : \rho = \sin(\frac{\theta}{2})$:

$\rho(\theta + 4\pi) = \rho(\theta)$: Etude sur $[-2\pi, 2\pi]$

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: Etude sur $[0, 2\pi]$, puis symétrie d'axe Oy.

θ	0		π		2π
ρ	0	$+$	1	$+$	0



III Etude des tangentes

Soit $C : \rho = f(\theta), \theta \in I$, où f est de classe C^1 (au moins)

Soit $\theta_0 \in I$, on cherche la tangente en $M(\theta_0)$.

$\overrightarrow{OM} = f(\theta).\vec{u}(\theta)$. Donc $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = f'(\theta).\vec{u}(\theta) + \underbrace{f(\theta)}_{\neq 0 \text{ si } M \neq O}.\vec{v}(\theta)$

Ainsi, sur une courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, si $M(\theta_0) \neq O$, alors ce point n'est pas stationnaire (la famille $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est en effet libre, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, elle forme même une base orthonormée directe de la direction de $\mathfrak{P}$)

- Si $M(\theta_0) \neq O$:

$\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0)$ fait un angle α avec $\vec{u}(\theta_0)$ tel que $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{f'(\theta_0)}{f(\theta_0)}$

En effet :

Si on note $\alpha = \left(\vec{u}(\theta_0), \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0)\right)$, alors $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0) = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0)\right\|(\cos\alpha.\vec{u}(\theta_0) + \sin\alpha.\vec{v}(\theta_0))$

Donc $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0)\right\|\cos\alpha = f'(\theta_0)$ et $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0)\right\|\sin\alpha = f(\theta_0)$, (et donc $\sin\alpha \neq 0$)

D'où le résultat.

Ainsi :

Si $M(\theta_0) \neq O$, ce point n'est pas stationnaire, et la tangente T_0 en ce point fait avec (OM_0) un angle orienté $\alpha = ((OM_0), T_0)$ tel que $\operatorname{cotan}\alpha = \dfrac{f'(\theta_0)}{f(\theta_0)}$

On peut aussi retenir que $\tan\alpha = \dfrac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$ si $f'(\theta_0) \neq 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sinon.

- Si $M(\theta_0)=O$:

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0)=f'(\theta_0).\vec{u}(\theta_0)+f(\theta_0).\vec{v}(\theta_0)=f'(\theta_0).\vec{u}(\theta_0)$$

- Si $f'(\theta_0)\neq 0$, alors $M(\theta_0)=O$ n'est pas stationnaire et la tangente est dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$.
- Si $f'(\theta_0)=0$ et qu'on peut dériver suffisamment de façon à tomber sur le premier $f^{(k)}(\theta_0)$ non nul (s'il en existe) :

$$\frac{d^k\overrightarrow{M}}{d\theta^k}(\theta_0)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i f^{(i)}(\theta_0).\vec{u}^{(k-i)}(\theta_0)=C_k^k f^{(k)}(\theta_0).\vec{u}(\theta_0+(k-k)\tfrac{\pi}{2})=f^{(k)}(\theta_0).\vec{u}(\theta_0)$$

Ainsi, dans tous les cas la tangente est dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$.

Exemple :

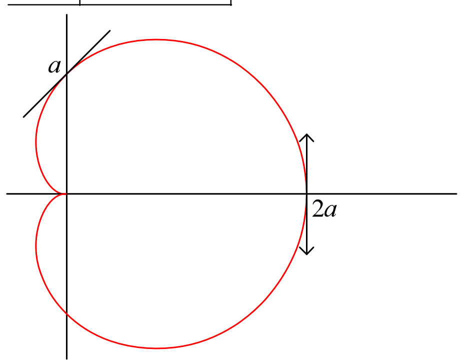
$C:\rho=a(1+\cos\theta)$ (« cardioïde »)

$\rho(\theta+2\pi)=\rho(\theta)$: Etude sur $[-\pi,\pi]$

$\rho(-\theta)=\rho(\theta)$: Etude sur $[0,\pi]$, puis symétrie d'axe Ox.

Si $a>0$:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\rho(\theta)$	$2a$	a	0



Etude des tangentes :

$\rho'(\theta)=-a\sin\theta$

Donc $\dfrac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}=\dfrac{-a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$

En $\theta=0$, on a donc $\operatorname{cotan}\alpha=0$, donc $\alpha=\frac{\pi}{2}[\pi]$ (et $(\overrightarrow{OM},T)=\alpha$).

En $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cotan}\alpha=-1$, donc $\alpha=\frac{-\pi}{4}[\pi]$ (et $(\overrightarrow{OM},T)=\alpha$).

IV Branches infinies

Diverses situations :

Soit $C:\rho=f(\theta),\theta\in I$ où I est un intervalle infini.

- Si I n'est pas majoré/minoré et $\lim\limits_{\theta\mapsto+\infty/-\infty}f(\theta)=\pm\infty$, on a une branche infinie spirale.

- Si $\lim_{\theta\mapsto\theta_0} f(\theta)=\pm\infty$ où $\theta_0\in \mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(I)$: on obtient une direction asymptotique dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$/d'angle polaire θ_0.

En effet, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(\theta)=f(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta)=f(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

Donc si $\cos\theta_0\neq 0$, au voisinage de θ_0 : $\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\tan\theta \xrightarrow[\theta\mapsto\theta_0]{} \tan\theta_0$.

On a alors une direction asymptotique de pente $\tan\theta_0$.

Si $\cos\theta_0=0$, au voisinage épointé de θ_0 : $\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \xrightarrow[\theta\mapsto\theta_0]{} \pm\infty$

Pour avoir les asymptotes, on fait ensuite l'étude de $y(\theta)-\tan\theta_0 x(\theta)\dots$

Exemple :

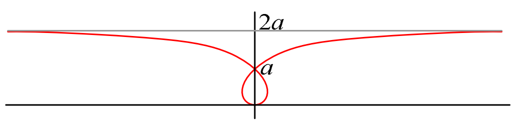
$\rho=a\tan(\frac{\theta}{2})$ où $a>0$.

$\rho(\theta+2\pi)=\rho(\theta)$: Etude sur $]-\pi,\pi[$.

$\rho(-\theta)=-\rho(\theta)$: Etude sur $[0,\pi[$ puis symétrie par rapport à Oy.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\rho(\theta)$	0	$+$	a	$+$	$+\infty \Vert$

$$y(\theta)=\rho(\theta)\sin(\theta)=a\tan(\tfrac{\theta}{2})\sin(\theta)=a\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}2\sin(\tfrac{\theta}{2})\cos(\tfrac{\theta}{2}) \xrightarrow[\theta\mapsto\pi]{} 2a$$

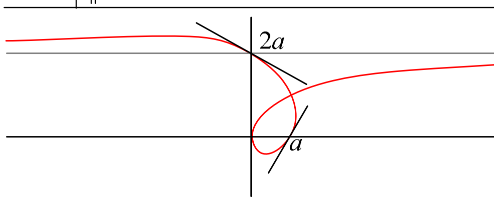


Autre exemple :

$C:\rho=a(1+\tan(\frac{\theta}{2}))$

$\rho(\theta+2\pi)=\rho(\theta)$: Etude sur $]-\pi,\pi[$.

θ	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\rho(\theta)$	$\Vert -\infty$	$-$	0	$+$	a	$+$	$2a$	$+$	$+\infty \Vert$



Déjà, on a une direction asymptotique horizontale :

$$y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta=2a(1+\tan(\tfrac{\theta}{2}))\sin(\tfrac{\theta}{2})\cos(\tfrac{\theta}{2})=2a(\sin(\tfrac{\theta}{2})\cos(\tfrac{\theta}{2})+\sin^2(\tfrac{\theta}{2})) \xrightarrow[\pm\pi]{} 2a$$

Tangente au point de paramètre $\theta=0$:

$\operatorname{cotan}\alpha=\dfrac{\rho'}{\rho}$ où $\alpha=((OM)\hat{,}T)$.

$\rho'=\frac{a}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})$.

Donc $\operatorname{cotan}\alpha=\frac{1}{2}$. Donc $\tan\alpha=2$ et OM est horizontal. Donc T est de pente 2.

En $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. On note $\beta = ((Ox)\hat{,} T)$

On a $\beta = ((Ox)\hat{,} T) = ((Ox)\hat{,} (OM)) + ((OM)\hat{,} T) = \frac{\pi}{2} + \alpha$

Donc $\tan\beta = \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{-1}{\tan\alpha} = \frac{-1}{2}$. Donc la tangente est de pente $\frac{-1}{2}$

V Recherche de points doubles

On doit chercher les points doubles parmi les solutions de :

- $\begin{cases} \rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) = 0 \\ \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$

Et

- $\begin{cases} \rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) \neq 0 \\ \theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi] \text{ et } \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$

Et

- $\begin{cases} \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2) \neq 0 \\ \theta_1 \equiv \pi + \theta_2\ [2\pi] \end{cases}$

Exemple : on reprend celui de la fin du paragraphe précédent :

On cherche un point double, pour $\theta_1 \in]0, \pi[$ et $\theta_2 \in]-\pi, \frac{-\pi}{2}[$ (d'après l'allure de la courbe). On cherche donc $\theta_1 \in]0, \pi[$ tel que $\rho(\theta_1 - \pi) = -\rho(\theta_1)$.

C'est-à-dire $1 + \tan(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\pi}{2}) = -1 - \tan(\frac{\theta_1}{2})$

Soit $1 + \frac{1}{\tan(\frac{\theta_1}{2})} = -1 - \tan(\frac{\theta_1}{2})$

Soit $\tan(\frac{\theta_1}{2}) + 1 = -\tan(\frac{\theta_1}{2}) - \tan^2(\frac{\theta_1}{2})$

Soit $2\tan(\frac{\theta_1}{2}) = 1 - \tan^2(\frac{\theta_1}{2})$

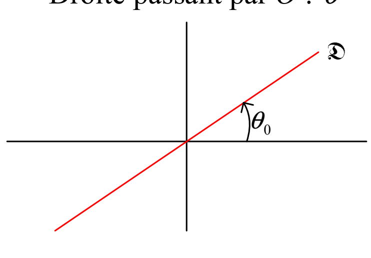
C'est-à-dire $\frac{2\tan(\frac{\theta_1}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta_1}{2})} = 1$

Soit $\tan(\theta_1) = 1$. Donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

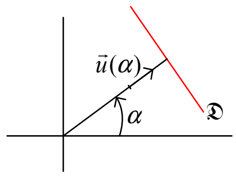
VI Quelques courbes classiques en coordonnées polaires

A) Droites

- Droite passant par O : $\theta = \theta_0$ est une équation en coordonnées polaires de $\mathfrak{D}$.



- Droite orthogonale à $\vec{u}(\alpha)$ unitaire et passant par H tel que $\overrightarrow{OH} = h.\vec{u}(\alpha)$.



Rappel :

$$\mathfrak{D} = \left\{M \in \mathfrak{P}, \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}(\alpha) = 0\right\} = \left\{M \in \mathfrak{P}, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}(\alpha) = \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}(\alpha)\right\}$$
$$= \left\{M \in \mathfrak{P}, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}(\alpha) = h\right\}$$

Soit $M(\rho,\theta)$: $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}(\theta)$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}(\alpha) = \rho.\underbrace{\vec{u}(\theta)\cdot\vec{u}(\alpha)}_{=\cos(\theta-\alpha)}$$

Donc $M \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow \rho.\cos(\theta-\alpha) = h$

Si $h \neq 0$ (alors $\rho \neq 0$, $\cos(\theta-\alpha) \neq 0$), c'est-à-dire si $\mathfrak{D}$ ne passe pas par O, l'équation s'écrit aussi $\rho = \dfrac{h}{\cos(\theta-\alpha)}$.

B) Cercles

- Cercle de centre O :

Pour $a \geq 0$, $\rho = a$ est une équation du cercle de centre O et de rayon a ($\rho = -a$ en est aussi une)

- Cercle C passant par O et de centre Ω de coordonnées polaires (r,α).

(C'est-à-dire telles que $\overrightarrow{O\Omega} = r.\vec{u}(\alpha)$)

Soit $M(\rho,\theta)$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in C &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM})^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (-r.\vec{u}(\alpha) + \rho.\vec{u}(\theta))^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow r^2 + \rho^2 - 2\rho.r.\cos(\theta-\alpha) = r^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \text{ou } \rho = 2.r.\cos(\theta-\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

Une équation polaire de C est donc $\rho = 2.r.\cos(\theta-\alpha)$

L'équation trouvée est donc de la forme $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$.

Inversement, soit $C : \rho = a\cos\theta + b\sin\theta$.

Si $a = b = 0$, alors $C = \{O\}$.

Sinon, $a^2 + b^2 \neq 0$ et $a\cos\theta + b\sin\theta$ se met sous la forme $2.r.\cos(\theta-\alpha)$

(avec $2r = \sqrt{a^2+b^2}$ et α tel que $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

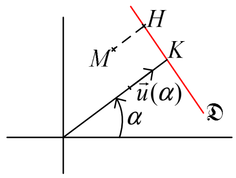
On reconnaît le cercle passant par O de centre Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = r.\vec{u}(\alpha)$.

C) Conique dont un des foyers est O.

Soient $\mathfrak{D}$ une droite ne passant pas par O, $e>0$, $C=\{M\in\mathfrak{P}, OM=eMH\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathfrak{D}$.

Si $e>1$, on a une hyperbole, si $e=1$ une parabole et si $0<e<1$ une ellipse.

Disons que $\mathfrak{D}$ est orthogonale à $\vec{u}(\alpha)$ et passe par K tel que $\overrightarrow{OK}=h.\vec{u}(\alpha)$ ($h\neq 0$ car $\mathfrak{D}$ ne passe pas par O)



Ainsi, $\mathfrak{D}:\rho=\dfrac{h}{\cos(\theta-\alpha)}$

Soit $M(\rho,\theta)$ (donc $\overrightarrow{OM}=\rho.\vec{u}(\theta)$)

H est déterminé par : $H\in\mathfrak{D}$ et $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{u}(\alpha)$.

Donc $\overrightarrow{MH}=\lambda.\vec{u}(\alpha)$.

$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KM}=-\rho.\vec{u}(\theta)+h.\vec{u}(\alpha)+\underbrace{\overrightarrow{KH}}_{\perp\vec{u}(\alpha)}$

Donc $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}(\alpha)=-\rho.\cos(\theta-\alpha)+h=\lambda$.

Ainsi, on a les équivalences :

$$
\begin{aligned}
M\in C &\Leftrightarrow MO=eMH\\
&\Leftrightarrow |\rho|=e|h-\rho\cos(\theta-\alpha)|\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\rho=e(h-\rho\cos(\theta-\alpha))\\ \text{ou } \rho=-e(h-\rho\cos(\theta-\alpha))\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\rho(1+e\cos(\theta-\alpha))=eh\\ \text{ou } \rho(1-e\cos(\theta-\alpha))=-eh\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\rho=\dfrac{eh}{1+e\cos(\theta-\alpha)} & (1)\\ \text{ou } \rho=\dfrac{-eh}{1-e\cos(\theta-\alpha)} & (2)\end{cases}
\end{aligned}
$$

(Pour la dernière équivalence, si $M\in C$, on a en effet $1\pm e\cos(\theta-\alpha)\neq 0$ car sinon $h=0$ ou $e=0$ ce qui est faux)

Une équation polaire de C est alors $\rho=\dfrac{eh}{1+e\cos(\theta-\alpha)}$. (En effet, (ρ,θ) est solution de (1) si et seulement si $(-\rho,\pi+\theta)$ est solution de (2))

eh s'appelle le paramètre de la conique.

On retrouve la nature de la conique avec l'équation :

- Si $1+e\cos(\theta-\alpha)$ ne s'annule pour aucune valeur de θ (c'est-à-dire si $1/e>1$), tout les $\theta\in[-\pi,\pi]$ sont permis, on a donc une ellipse.

- Si $1+e\cos(\theta-\alpha)$ s'annule pour deux valeurs de θ (modulo 2π), c'est-à-dire si $\cos(\theta-\alpha)=-1/e$ a deux solutions $\pm\beta\,[2\pi]$, c'est-à-dire si $e>1$, on a alors une hyperbole.
- Si $1+e\cos(\theta-\alpha)$ ne s'annule qu'une fois modulo 2π, c'est-à-dire si $e=1$, on a alors une parabole.

Réciproque :

Soit $C:\rho=\dfrac{a}{b+c\cos\theta+d\sin\theta}$ avec $a\neq 0$, $b^2+c^2+d^2\neq 0$.

1^er cas : Si $b=0$.

$\rho=\dfrac{a}{c\cos\theta+d\sin\theta}=\dfrac{a}{r\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $r=\sqrt{c^2+d^2}$, on obtient une droite.

2^ème cas : Si $b\neq 0$ et $c^2+d^2\neq 0$

$\rho=\dfrac{a/b}{1+c/b\cos\theta+d/b\sin\theta}=\dfrac{eh}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $e=\sqrt{\frac{c^2}{b^2}+\frac{d^2}{b^2}}$ et $h=\dfrac{a}{be}$.

On reconnaît une conique d'excentricité *e*, de foyer *O* et de directrice associée

$\mathfrak{D}:\rho=\dfrac{h}{\cos(\theta-\theta_0)}=\dfrac{a}{c\cos\theta+d\sin\theta}$

3^ème cas : Si $b\neq 0$ et $c^2+d^2=0$

$\rho=\dfrac{b}{a}$. On obtient un cercle de centre *O*.