

Exercice 1:

1) $V(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$2 + 2x + x^2 + y^2 = 1 + (x+1)^2 + y^2 > 0$$

$\Rightarrow f$ est de classe C^1 (et même C^∞) sur \mathbb{R}^2

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$* f'_x(x, y) = \frac{2 + 2x}{2 + 2x + x^2 + y^2}$$

$$* f'_y(x, y) = \frac{2y}{2 + 2x + x^2 + y^2}$$

$$* f''_{xx}(x, y) = \frac{2(2 + 2x + x^2 + y^2) - (2 + 2x)^2}{(2 + 2x + x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{-4x - 2x^2 + 2y^2}{(2 + 2x + x^2 + y^2)^2}$$

$$* f''_{yy}(x, y) = \frac{2(2 + 2x + x^2 + y^2) - 4y^2}{(2 + 2x + x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{4 + 4x + 2x^2 - 2y^2}{(2 + 2x + x^2 + y^2)^2}$$

$$* f''_{xy}(x, y) = \frac{-2y(2 + 2x)}{(2 + 2x + x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{-4y - 4xy}{(2 + 2x + x^2 + y^2)^2}$$

2) le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage de $(-1, 0)$ est donné par :

$$f(-1+h, k) \approx$$

$$f(-1, 0) + h f'_x(-1, 0) + k f'_y(-1, 0)$$

$$+ \frac{1}{2} [h^2 f''_{xx}(-1, 0) + 2hk f''_{xy}(-1, 0) + k^2 f''_{yy}(-1, 0)]$$

$$+ (h^2 + k^2) \varepsilon(h, k)$$

$$\text{ou } \begin{cases} f(-1, 0) = \ln 1 = 0 \\ f'_x(-1, 0) = 0 \\ f'_y(-1, 0) = 0 \\ f''_{xx}(-1, 0) = 2 \\ f''_{yy}(-1, 0) = 2 \\ f''_{xy}(-1, 0) = 0 \end{cases}$$

Avec $\lim_{(h, k) \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0$

Donc le dev. cherché est :

$$f(-1+h, k) = \frac{1}{2} [2h^2 + 2k^2] + (h^2 + k^2) \varepsilon(h, k)$$

$$= (h^2 + k^2) + (h^2 + k^2) \varepsilon(h, k)$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$f(x, y) = (x+1)^2 + y^2 + ((x+1)^2 + y^2) \varepsilon(x, y)$$

ou $\lim_{(x, y) \rightarrow (-1, 0)} \varepsilon(x, y) = 0$

3) D'après le développement de Taylor on peut déduire que le plan tangent (P) a pour équation cartésienne $z = 0$

la surface (S) est située au dessus de (P) car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) - 0$$

$$= \ln(2 + 2x + x^2 + y^2) - 0$$

$$= \ln(1 + (x+1)^2 + y^2) \geq 0$$

4) Points stationnaires de f :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Donc f admet un seul point critique (stationnaire) qui est le point: $A(-1,0)$

Conditions suffisantes:

$$D(A,0) = [f''_{yy}(-1,0)]^2 - [f''_{xx}(-1,0)][f''_{yy}(-1,0)] \\ = [0]^2 - [2] \times [2] < 0$$

$$f''_{xx}(-1,0) = 2 > 0$$

$\Rightarrow f$ admet un minimum local en $A(-1,0)$

Exercice 2:

1) $\vec{F}(t) = (x(t); y(t))$

Le domaine de définition de \vec{F}

est $D_{\vec{F}} = \mathbb{R} - \{1\}$

en $-\infty$

$$* \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t - 2 + \frac{1}{t-1} = -\infty$$

$$* \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{t-1} = 1$$

\Rightarrow la courbe (C) admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$ (cette branche \in quadrant II)

en 1^-

$$* \lim_{t \rightarrow 1^-} x = \lim_{t \rightarrow 1^-} (t-2 + \frac{1}{t-1}) = -\infty$$

$$* \lim_{t \rightarrow 1^-} y = \lim_{t \rightarrow 1^-} (1 - \frac{1}{t-1}) = +\infty$$

$$* \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - \frac{1}{t-1}}{t-2 + \frac{1}{t-1}} \\ = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t-2}{(t-2)(t-1)+1}$$

$$= -1$$

$$* \lim_{t \rightarrow 1^-} y+x = \lim_{t \rightarrow 1^-} t-1 = 0^-$$

\Rightarrow (C) admet au voisinage de 1 la droite d'équation $y=-x$ comme asymptote oblique (cette branche est située dans le quadrant II)

en 1^+

$$* \lim_{t \rightarrow 1^+} x = +\infty$$

$$* \lim_{t \rightarrow 1^+} y = -\infty$$

$$* \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{y}{x} = -1$$

$$* \lim_{t \rightarrow 1^+} y+x = \lim_{t \rightarrow 1^+} t-1 = 0^+$$

\Rightarrow la droite d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de 1^+ (cette branche \in quadrant IV)

en $+\infty$

$$* \lim_{t \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$* \lim_{t \rightarrow +\infty} y = 1$$

\Rightarrow la droite d'équation $y=1$

est asymptote horizontale à
(C) au voisinage de $+\infty$
(cette branche est dans le quadrant (I))

2) $\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$* x'(t) = 1 - \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

$$* y'(t) = \frac{1}{(t-1)^2} > 0$$

d'où le tableau des variations
de x et y :

t	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$x'(t)$	+	0	-	-	0	+
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$+\infty$
$y'(t)$	+	+	+	+	+	+
y	1	2	$+\infty$	$-\infty$	1	1

3) $\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$* x''(t) = \frac{2}{(t-1)^3}$$

$$* y''(t) = \frac{-2}{(t-1)^3}$$

$$\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{(t-1)^2}\right) \left(\frac{2}{(t-1)^3}\right) - \left(\frac{1}{(t-1)^2}\right) \left(\frac{2}{(t-1)^3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((t-1)^2 - 1)(2) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 : \text{iracceptable!}$$

Donc (C) n'admet ni point
de rebroussement, ni point
d'inflexion. (Tous ses points
sont ordinaires)

4) intersection avec les axes :

* avec l'axe (y/y) : $x(t) = 0$

$$\Leftrightarrow t - 2 + \frac{1}{t-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t-1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 3 = 0$$

$$\Delta < 0$$

\rightarrow pas de solution

Donc (C) ne coupe pas
l'axe y/y

* avec l'axe (x/x) : $y(t) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{t-1} = 0$$

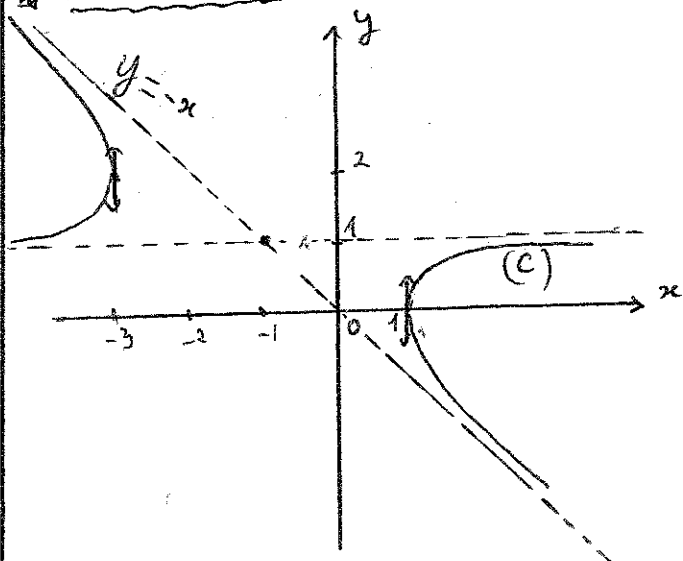
$$\Leftrightarrow t - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

Pour $t=2 \rightarrow x(t=2) = 1$

Donc (C) coupe l'axe (x/x) au
point de coordonnées $(1, 0)$:

Trace' de (C) :



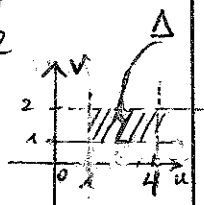
Exercice 3:

L'aire de \mathcal{D} est $A = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$

Pour cela on pose $\begin{cases} u = \frac{x^2}{2} \\ v = \frac{y^2}{2} \end{cases}$

$$\bullet (x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u \leq 4 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (u, v) \in \Delta$$



où $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 2\}$

■ Jacobien ?

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = ?$$

$$* \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -x^2 \\ -y & 2y \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 1$$

$$= 3 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{3}$$

$$\bullet A = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$$

$$= \iint_{\Delta} |J| du dv$$

$$= \iint_{\Delta} \frac{1}{3} du dv$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Delta} du dv$$

$$= \frac{1}{3} \times 3 \times 1$$

$$= 1 \text{ unité d'aire}$$

Exercice 4:

$$1) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

■ sur \mathcal{D}_a : $\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2} \\ r \text{ varie de } 0 \text{ à } a \end{cases}$

$$J_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a -2r e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-r^2} \right]_0^a$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) (e^{-a^2} - 1)$$

$$= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2})$$

$$\bullet \text{ De même } J_{2a} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-(2a)^2}) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-4a^2})$$

$$2) \lim_{a \rightarrow +\infty} J_a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2})$$

$$= \frac{\pi}{4} (1 - 0)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

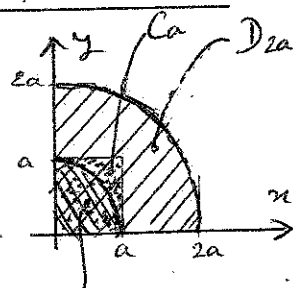
$$\bullet \lim_{a \rightarrow +\infty} J_{2a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-4a^2})$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

3)

$$\bullet \mathcal{D}_a \subset \mathcal{C}_a \subset \mathcal{D}_{2a}$$

$$\Rightarrow J_a \leq K_a \leq J_{2a}$$



$$\bullet \lim_{a \rightarrow +\infty} J_a = \lim_{a \rightarrow +\infty} J_{2a} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} K_a = \frac{\pi}{4} \text{ par comparaison}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad K_a &= \int_0^a dx \int_0^a e^{-(x^2+y^2)} dy \\
 &= \int_0^a e^{-x^2} dx \cdot \int_0^a e^{-y^2} dy \\
 &= I_a \times I_a \\
 &= I_a^2
 \end{aligned}$$

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_a^2 = \lim_{a \rightarrow +\infty} K_a = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{car } I > 0)$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^2 (1-4y) dy \\
 &= [y - 2y^2]_0^2 = -6
 \end{aligned}$$

$$* \quad I_3 = ?$$

Sur $[B_0]$: $\begin{cases} y=x \rightarrow dy=dx \\ x \text{ varie de } 2 \text{ à } 0 \end{cases}$

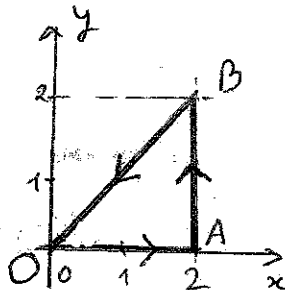
$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_2^0 (x^2 - 2x + 1 - 2x^2) dx \\
 &= -\int_0^2 (-x^2 - 2x + 1) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_0^2 \\
 &= \frac{8}{3} + 4 - 2 = \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I &= I_1 + I_2 + I_3 \\
 &= -4 - 6 + \frac{14}{3} \\
 &= -\frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

Exercice 5 :

1)

$$\omega = (y^2 - 2x) dx + (1 - 2xy) dy$$



$$I = \int_{\Gamma} \omega = \underbrace{\int_{[OA]} \omega}_{I_1} + \underbrace{\int_{[AB]} \omega}_{I_2} + \underbrace{\int_{[BO]} \omega}_{I_3}$$

$$* \quad I_1 = ?$$

Sur $[OA]$: $\begin{cases} y=0 \rightarrow dy=0 \\ x \text{ varie de } 0 \text{ à } 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^2 -2x dx = -[x^2]_0^2 \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

$$* \quad I_2 = ?$$

Sur $[AB]$: $\begin{cases} x=2 \rightarrow dx=0 \\ y \text{ varie de } 0 \text{ à } 2 \end{cases}$

$$2) \quad \begin{cases} P(x,y) = y^2 - 2x \\ Q(x,y) = 1 - 2xy \end{cases}$$

• P, Q : de classe C^1 sur Γ et à l'intérieur de Γ

• Γ : chemin fermé simple

Le théorème de Green nous dit :

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_D [-2y - 2y] dx dy$$

$$= -4 \iint_D y dx dy$$

$$= -4 \int_0^2 dx \int_0^x y dy$$

$$\begin{aligned}
 I &= -4 \int_0^2 \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x \right) dx \\
 &= -2 \int_0^2 x^2 dx \\
 &= -2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= -2 \times \frac{8}{3} \\
 &= -\frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

3) Masse de D : $M = ?$

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D f(x,y) dx dy \\
 &= \iint_D y dx dy
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4} I$$

$$= -\frac{1}{4} \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

unité
de masse

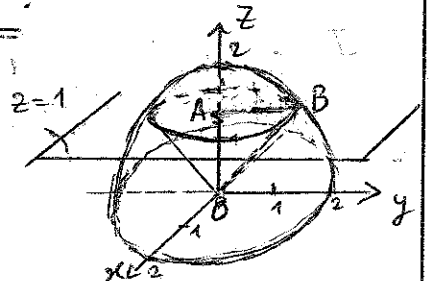
Centre de gravité : G

$$\begin{aligned}
 * x_G &= \frac{1}{M} \iint_D x f(x,y) dx dy \\
 &= \frac{3}{4} \iint_D xy dx dy \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^2 x dx \int_0^x y dy \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^2 x \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x \right) dx \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx \\
 &= \frac{3}{8} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * y_G &= \frac{1}{M} \iint_D y f(x,y) dx dy \\
 &= \frac{3}{4} \iint_D y^2 dx dy \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^2 dx \int_0^x y^2 dy \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^2 \left(\left[\frac{y^3}{3} \right]_0^x \right) dx \\
 &= \frac{4}{9} \int_0^2 x^3 dx \\
 &= \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\
 &= \frac{16}{9} \\
 &\Rightarrow G \left(\frac{3}{2} ; \frac{16}{9} \right)
 \end{aligned}$$

Exercice 6 :

$$\begin{aligned}
 OA &= 1 \\
 OB &= 2 \\
 AB &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$



Le volume de (S) est

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\
 &= \frac{1}{2} V_{\text{sphere}} - V_{\Omega_1}
 \end{aligned}$$

où

Ω_1 = la calotte sphérique
définie par $z \geq 1$ et
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

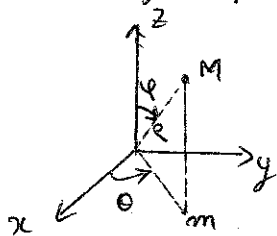
$$\begin{aligned}
 \text{Donc } V &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi (2)^3 - V_{\Omega_1} \\
 &= \frac{16}{3} \pi - V_{\Omega_1}
 \end{aligned}$$

* $V_{\Omega_1} = ?$

$$V_{\Omega_1} = \iiint_{\Omega_1} dx dy dz$$

Passons aux coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$



Sur Ω_1 :

$$\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ \varphi \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi/3 \\ \rho \text{ varie de } \frac{1}{\cos \varphi} \text{ à } 2 \end{cases}$$

car $\begin{cases} \angle AOB = \pi/3 \\ z=1 \\ \Rightarrow \rho \cos \varphi = 1 \\ \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos \varphi} \end{cases}$

Donc

$$\begin{aligned} V_{\Omega_1} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^2 \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/3} \sin \varphi \left(8 - \frac{1}{\cos^3 \varphi} \right) d\varphi \end{aligned}$$

$t = \cos \varphi \Rightarrow dt = -\sin \varphi d\varphi$

$$\begin{aligned} V_{\Omega_1} &= -\frac{2\pi}{3} \int_1^{1/2} \left(8 - \frac{1}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[8t + \frac{1}{2t^2} \right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[8 + \frac{1}{2} - 4 - 2 \right] \\ &= \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = \frac{16\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$$

unités de volume

Autre méthode :

Ω_2 = cône de sommet O et de rayon AB

Ω_3 = demi-sphère privée du cône.

Le volume de (S) est alors

$$V = V_{\Omega_2} + V_{\Omega_3}$$

* V_{Ω_2} = volume du cône
 $= \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^2 \times 1$
 $= \pi$

* V_{Ω_3} = volume de Ω_3
 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho$
 $= 2\pi \left[-\cos \varphi \right]_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2$
 $= \left(\frac{16\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$
 $= \frac{8\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= V_{\Omega_2} + V_{\Omega_3} \\ &= \pi + \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{11\pi}{3} \quad \text{unités de volume.}$$

