Corrigé - Examen final MVA006 - 2012

Exercice 1 :

1) * f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$
* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:
- $f'_x(x,y) = 6x^2 + a$
- $f'_y(x,y) = -8y + 2$
- $f''_{xx}(x,y) = 12x$
- $f''_{yy}(x,y) = -8$
- $f''_{xy}(x,y) = 0$

2) Les points critiques de f sont les solutions du systém

$$(S) \begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 + a = 0 \\ -8y + 2 = 0 \end{cases}$$

On distingue alors 3 cas :

$\boxed{a > 0}$

le sytéme (S) n'admet pas de solution.

$\Rightarrow$ f n'admet pas de point critique.

$\boxed{a = 0}$

le systéme (S) équivaut à $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow$ f admet un seul point critique : le point $A(0; \frac{1}{4})$

$\boxed{a < 0}$

le systéme (S) équivaut à $\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{-a}{6}} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow$ f admet deux points critiques : les points $B\left(\sqrt{\frac{-a}{6}}; \frac{1}{4}\right)$ et $C\left(-\sqrt{\frac{-a}{6}}; \frac{1}{4}\right)$

3) Etudions les conditions du second ordre :

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$D(x,y) = [f''_{xy}(x,y)]^2 - [f''_{xx}(x,y)][f''_{yy}(x,y)]$$

* Supposons $a = 0$:

$$f(x,y) = 2x^3 - 4y^2 + 2y$$

Ici f admet un seul point critique : $A(0; \frac{1}{4})$.

$$D(0; \tfrac{1}{4}) = [0]^2 - [0] \cdot [-8] = 0$$

$\Rightarrow$ Il faut faire une étude spéciale en ce point :

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(0+h; \tfrac{1}{4}+k) - f(0; \tfrac{1}{4}) \\ &= 2h^3 - 4(\tfrac{1}{4}+k)^2 + 2(\tfrac{1}{4}+k) \\ &\quad - \left(-\tfrac{4}{16} + 2 \times \tfrac{1}{4}\right) \\ &= 2h^3 - 4k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 0 \text{ et } h \to 0^+ & \Delta f = 2h^3 > 0 \\ \text{Pour } h = 0 \text{ et } k \to 0 & \Delta f = -4k^2 < 0 \end{cases}$$

Donc lorsque $(h,k) \to (0,0)$ Δf ne garde pas un signe constant

(Cette branche est située dans le quadrant III)

$\boxed{\text{en } 0^+}$

$$\begin{cases} \cdot \lim\limits_{0^+} x(t) = \lim\limits_{0^+} te^t = 0^+ \\ \cdot \lim\limits_{0^+} y(t) = \lim\limits_{0^+} \dfrac{e^t}{t} = +\infty \end{cases}$$

Même conclusion qu'en 0^- (cette branche est située dans le quadrant I)

$\boxed{\text{en } +\infty}$

$$\begin{cases} \cdot \lim\limits_{+\infty} x(t) = \lim\limits_{+\infty} te^t = +\infty \\ \cdot \lim\limits_{+\infty} y(t) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty \end{cases}$$

$\cdot \lim\limits_{+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{t^2} = 0$

$\Rightarrow$ (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $x'Ox$.

(Cette branche est située dans le quadrant I)

2) $\forall t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} \cdot x'(t) = e^t + te^t = (t+1)e^t \\ \cdot y'(t) = \dfrac{te^t - e^t}{t^2} = \dfrac{(t-1)}{t^2}e^t \end{cases}$$

On en déduit les tab. de variations :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x	0	↘	$-1/e$	↗	0 ‖ 0	↗	e	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-1/e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$
$m(t)$	0		∞		‖		0		

indicateur de tangente : $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t-1}{t^2(t+1)}$$

3) ▪ intersection

* avec l'axe $x'x$

$y(t) = 0 \iff \dfrac{e^t}{t} = 0$: impossible!

$\Rightarrow$ (C) ne coupe pas l'axe $x'x$

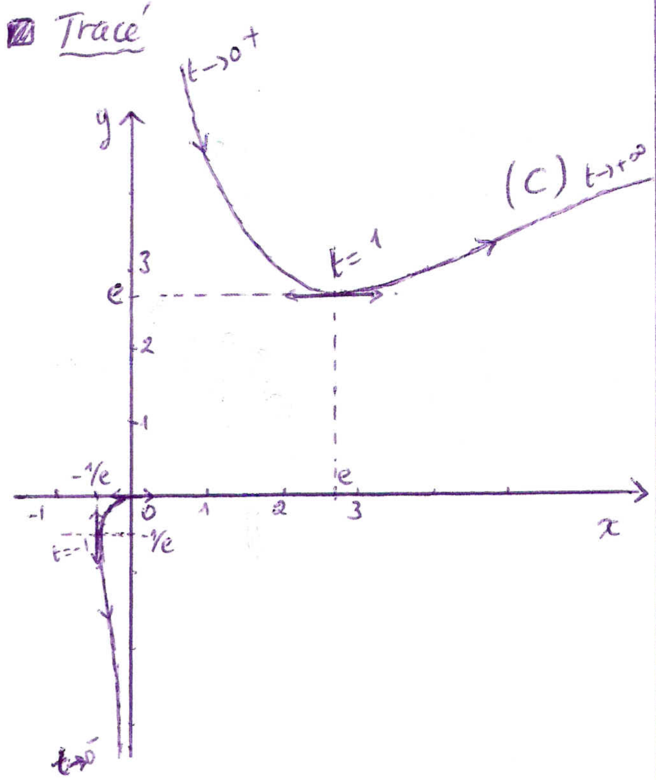
* avec l'axe $y'y$:

$x(t) = 0 \iff te^t = 0$

$\iff t = 0$: inacceptable!

$\Rightarrow$ (C) ne coupe pas l'axe $(y'y)$

▪ Tracé



Exercice 3 :

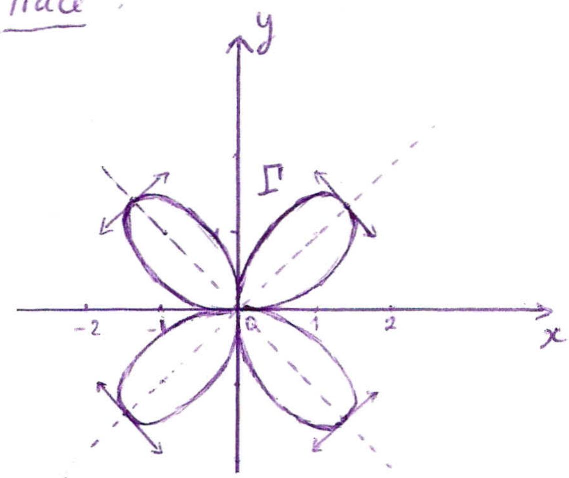
1) • $D_\rho = \mathbb{R}$

• $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta) \Rightarrow \Gamma$ est 2π-périodique

• $\rho(-\theta) = -\rho(\theta) \Rightarrow \Gamma$ est symétrique par rapport à $y'y$.

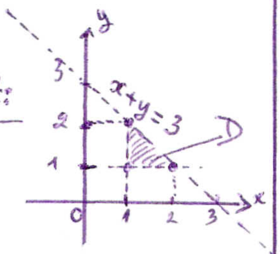
Pour l'obtenir entièrement il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$ puis

Tracé :



Exercice 4 :

a) Coupe à x constant:



$$I = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^2}$$

$$= \int_1^2 \left(-\left[\frac{1}{x+y}\right]_1^{3-x} \right) dx$$

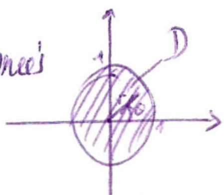
$$= -\int_1^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x + \ln(x+1) \right]_1^2$$

$$= -\frac{2}{3} + \ln 3 + \frac{1}{3} - \ln 2$$

$$= -\frac{1}{3} + \ln(3/2)$$

b) Passons aux coordonnées polaires ; $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



Sur D : $\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ r \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \end{cases}$

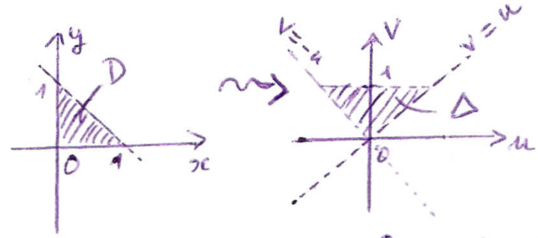
$$J = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - 2\cos r^2)\, r\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r - 2r\cos r^2)\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \sin r^2 \right]_0^1$$

$$J = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \sin 1\right)$$

c)



Posons $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(-u+v) \end{cases}$

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ -u + v \geq 0 \\ v \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v \geq -u \\ v \geq u \\ v \leq 1 \end{cases}$$

Donc $(x,y) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in \Delta$

où $\Delta = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : v \geq -u,\ v \geq u,\ v \leq 1 \}$

Jacobien

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$K = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy = \iint_\Delta e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{1}{2}\right| du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \iint_\Delta e^{\frac{u}{v}}\, du\, dv$$

Coupe à v constant :

$$K = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \left[v e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^{v}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e - e^{-1})\, v\, dv$$

$$= \left(\frac{e - e^{-1}}{2} \right) \cdot \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{4}$$

Exercice 7 :

Les fonctions $(x,y) \xrightarrow{P} 1+y^2$ et $(x,y) \xrightarrow{Q} y$ sont de classe C^1 sur Γ et sur D. (Γ : chemin fermé simple)

Donc le théorème de Green-Riemann s'applique :

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (0 - 2y)\, dx\,dy$$

$$= -\int_0^{\pi/3} dx \int_{\sin x}^{\sin 2x} 2y\, dy$$

$$= -\int_0^{\pi/3} \left(\left[y^2\right]_{\sin x}^{\sin 2x} \right) dx$$

$$= -\int_0^{\pi/3} \left(\sin^2 2x - \sin^2 x \right) dx$$

$$= -\int_0^{\pi/3} \left(\frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \left(-\cos 4x + \cos 2x \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x \right]_0^{\pi/3}$$

$$= -\frac{1}{8}\left[-\sin 4x + 2\sin 2x \right]_0^{\pi/3}$$

$$= -\frac{1}{8}\left[-\sin\frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} \right]$$

$$= -\frac{1}{8}\left[+\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \right]$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

Exercice 8 :

1) $(A+I_3)(A+2I_3)(A+3I_3) = \cdots = 0$

2) $(A^2 + 3A + 2I_3)(A+3I_3) = 0$

$\Leftrightarrow A^3 + 3A^2 + 3A^2 + 9A + 2A + 6I_3 = 0$

$\Leftrightarrow A^3 + 6A^2 + 11A + 6I_3 = 0$

$\Leftrightarrow A(A^2 + 6A + 11I_3) = -6I_3$

$\Leftrightarrow A\Big[\underbrace{-\tfrac{1}{6}(A^2 + 6A + 11I_3)}_{A^{-1}}\Big] = I_3$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 + 6A + 11I_3)$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 4 & 10 & -10 \\ -3 & 3 & -2 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/3 & -2/3 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

3) ▪ $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= +2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

($\Rightarrow A$ inversible)

▪ Cofacteurs de A :

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ $\quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ $\quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

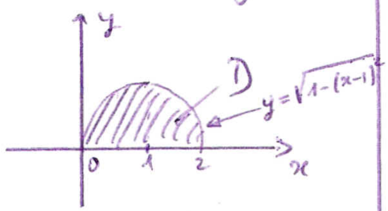
$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ $\quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$

Exercice 5 :

$x^2+y^2-2x \le 0 \iff (x-1)^2+y^2 \le 1$

intérieur du cercle de centre (1,0) et de rayon 1



la masse de la plaque est

$$M = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_D xy\,dxdy$$

$$= \int_0^2 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y\,dy$$

$$= \int_0^2 x\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\left(1-(x-1)^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x(-x^2+2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

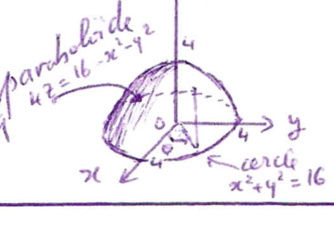
$$= \frac{1}{2}\left[-4+\frac{16}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3} \text{ unité de masse}$$

Exercice 6 :

Volume :

$V = \iiint_\Omega dxdydz$ d'éq



Passons aux coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Sur Ω : $\begin{cases} \cdot\ \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ \cdot\ \rho \text{ varie de } 0 \text{ à } 4 \\ \cdot\ z \text{ varie de } 0 \text{ à } \frac{16-\rho^2}{4} \end{cases}$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\,d\rho \int_0^{\frac{16-\rho^2}{4}} dz$$

$$= 2\pi \int_0^4 \rho\left(\frac{16-\rho^2}{4}\right)d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^4 \rho(16-\rho^2)\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[8\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[128-64\right]$$

$$= 32\pi \text{ unités de volume}$$

Centre de Gravité G :

* Par symétrie on a $x_G = y_G = 0$
* $z_G = \frac{1}{V}\iiint_\Omega z\,dxdydz$

$$= \frac{1}{32\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\,d\rho \int_0^{\frac{16-\rho^2}{4}} z\,dz$$

$$= \frac{1}{32\pi}\cdot 2\pi \int_0^4 \frac{\rho}{2}\left(\frac{16-\rho^2}{4}\right)^2 d\rho$$

$$= \frac{1}{512}\int_0^4 \rho(16-\rho^2)^2\,d\rho$$

$$= \frac{1}{512}\int_0^4 \rho(256-32\rho^2+\rho^4)\,d\rho$$

$$= \frac{1}{512}\left[128\rho^2-8\rho^4+\frac{\rho^6}{6}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{512}\left[2048-2048+\frac{2048}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{3} \Rightarrow G\left(0;0;\frac{4}{3}\right)$$

d'effectuer la symetrie par rapport à l'axe y'y.

- $\rho(\pi-\theta) = 2\sin(2(\pi-\theta)) = -\rho(\theta)$

$\Rightarrow$ Γ est symétrique % à l'axe x'x.

Pour l'obtenir il suffit de l'étudier sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ puis d'effectuer la symétrie % x'x, puis la symétrie % y'y.

Conclusion :

le domaine d'étude de Γ est $[0;\pi/2]$. Après on effectue les deux symetries ci-dessus.

Etude sur $[0,\pi/2] \xrightarrow{sym\% x'x} \xrightarrow{sym\% y'y} \Gamma$

■ NB :

* $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta) \Rightarrow$ Γ est sym % O. Il suffit de l'étudier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis d'effectuer la sym % O.

* $\rho(-\theta) = -\rho(\theta) \Rightarrow$ Γ est sym % y'y. Pour obtenir Γ, il suffit de l'étudier sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ puis d'effectuer la sym % y'y, et la sym % O.

Etude sur $[0,\frac{\pi}{2}] \xrightarrow{sym\% y'y} \xrightarrow{sym\% O} \Gamma$

2) ■ Variations

$\forall \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ $\rho'(\theta) = 4\cos 2\theta$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le 2\theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho'(\theta) \ge 0 \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le 2\theta \le \pi \Rightarrow \rho'(\theta) \le 0 \end{cases}$$

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$\rho'(\theta)$		$+$	0	$-$	
ρ	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

■ Etude des tangentes :

* en $\theta = 0$:
  - $M(\theta=0)$ a pour coordonnées $(0,0)$
  - $\tan V = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\cos 2\theta} = 0$

  $\Rightarrow V = 0$ $[\text{mod } \pi]$

  Donc Γ admet en $M(\theta=0)$ de coordonnées $(0,0)$ une tangente horizontale

* en $\theta = \frac{\pi}{4}$:
  - $M(\theta=\frac{\pi}{4})$ a pour coordonnés $(2\cos\frac{\pi}{4} ; 2\sin\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2};\sqrt{2})$
  - $\tan V = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \pm\infty$

  $\Rightarrow V = \pm\frac{\pi}{2}$

  Donc Γ admet au point $M(\theta=\frac{\pi}{4})$ de coordonnés $(\sqrt{2};\sqrt{2})$, une tangente orthogonale au rayon $\overrightarrow{OM}$.

* en $\theta = \frac{\pi}{2}$:
  - $M(\theta=\frac{\pi}{2})$ a pour coordonnés $(0,0)$.
  - $\tan V = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = 0$

  Donc Γ admet au point $M(\theta=\frac{\pi}{2})$ de coordonnés $(0,0)$ une tangente verticale.

$\Rightarrow f$ admet en $A(0\,;\frac{1}{4})$ un point de selle (Col) (ce n'est pas un extrémum)

* <u>Supposons $a<0$</u>

Ici f admet 2 points critiques : $B\left(\sqrt{\frac{-a}{6}}\,;\frac{1}{4}\right)$ et $C\left(-\sqrt{\frac{-a}{6}}\,;\frac{1}{4}\right)$

• $D\left(\sqrt{\frac{-a}{6}}\,;\frac{1}{4}\right)=[0]^2-\left[12\sqrt{\frac{-a}{6}}\right][-8]>0$

$\Rightarrow f$ admet en B un point de selle (Col)

• $\begin{cases} D\left(-\sqrt{\frac{-a}{6}}\,;\frac{1}{4}\right)=[0]^2-\left[-12\sqrt{\frac{-a}{6}}\right][-8]<0 \\ f''_{xx}\left(-\sqrt{\frac{-a}{6}}\,;\frac{1}{4}\right)=-12\sqrt{\frac{-a}{6}}<0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ admet en C un maximum local

* <u>Supposons $a>0$</u>

Ici f n'admet pas de point critique

$\Rightarrow f$ n'admet pas d'extrémum sur $\mathbb{R}^2$

<u>En conclusion :</u>

$\begin{cases} \text{si } a>0 : \text{pas d'extrémum} \\ \text{si } a=0 : \text{pas d'extrémum mais un col en } A(0,\frac{1}{4}) \\ \text{si } a<0 : \text{un col en } B\left(\sqrt{\frac{-a}{6}},\frac{1}{4}\right) \text{ et un max local en } C\left(-\sqrt{\frac{-a}{6}},\frac{1}{4}\right) \end{cases}$

4) On a vu que pour $a<0$ f admet un maximum local en $C\left(-\sqrt{\frac{-a}{6}}\,;\frac{1}{4}\right)$.

Mais :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to+\infty} 2x^3+ax=+\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ <u>f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$</u>

<u>Exercice 2 :</u>

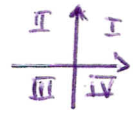
1) $\vec{F}(t)=(x(t)\,;\,y(t))$

* $D_{\vec{F}}=\mathbb{R}^*=]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$

$\boxed{\text{en } -\infty}$

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty} x(t)=\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0 \\ \lim\limits_{t\to-\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{e^t}{t}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ le point $O(0,0)$ est un point limite de (C)



$\boxed{\text{en } 0^-}$

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to0^-} x(t)=\lim\limits_{t\to0^-} te^t=0^- \\ \lim\limits_{t\to0^-} y(t)=\lim\limits_{t\to0^-} \frac{e^t}{t}=-\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C) au vois. de 0^-

$$Co(A) = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^t Co(A) = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

---

4) ▪ $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -5/6 \\ -7/6 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

▪ $A^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

---

5) ▪ les 3 premières équations s'écrivent (sous forme matricielle) :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

. ~~Le~~ système formé par ces 3 équations équivaut donc à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/6 \\ -7/6 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

▪ Remplaçons dans la 4ème équat°

$-\frac{5}{6} - \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{21}{6} = 1$: FAUX

<u>Conclusion</u> : le système initial (à 4 équations) n'admet pas de solution. (il est incompatible)