Université Libanaise **ISAE - Cnam Liban** **Centre du Liban associé au Cnam Paris**	**Date : Lundi *22 Juillet 2013*** **Durée : 3H** **De *11H* à *14H***	**Semestre : *2ième*** **Année : *2013***
Code UE : *MVA 006* **Intitule de l'UE : *Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.***		**Ce sujet comporte : *2 pages***

Type d'examen :	**Semestriel**	☐ Partiel	☒ Final	€ Rattrapage	
	Annuel	€ E1	€ E'1	€ E2	€ E'2

Documents autorisés : € Tous ☒ Aucun € Autre (A préciser : ……………………………………….)

Consignes particulières : *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Calculatrice: € Aucune € Programmable ☒ Non programmable

Centres concernés	☒ **Beyrouth**	☒ **Baakline**	☒ **Baalbeck**	☒ **Nahr Ibrahim**
	☒ **Bickfaya**	☒ **Ghazza**	☒ **Tripoli**	

<u>Exercice 1:</u> (3 points)

Soit la fonction f de deux variables réelles définie par : $f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

1-Déterminer les points critiques de f.

2-La fonction f admet-elle des extrémums aux points critiques trouvés ?

3-Montrer que $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque $x^2+y^2 \longrightarrow +\infty$.

4-Déduire de ce qui précède l'existence d'extrémums globaux pour la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Exercice 2:</u> (3,5 pts)

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t} \end{cases}$ où le paramètre t varie dans $\mathbb{R}^*$

1-Etudier les branches infinies de (C).

2-Dresser le tableau de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\mathbb{R}$.

3-La courbe (C) admet-elle des points de rebroussement? Des points d'inflexion ?
Si oui, on donnera une équation de la tangente en chacun de ces points.

4-Etudier l'intersection de (C) avec les axes de coordonnées et dessiner la courbe (C).

<u>Exercice 3:</u> (4 points)

Calculer les intégrales suivantes:

a) $I = \iint_D xy\,dxdy$ où $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1, \ \ x^3 \le y \le x^2 \}$

b) $J = \iint_D (x+y)e^{-x-y}\,dxdy$ où $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ \ y > 0, \ \ x+y < 1 \}$

<u>Indication</u> : On pourra éventuellement poser : $x = uv$ *et* $y = (1-v)u$

c) $K = \iiint_\Omega \dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dxdydz$ où $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, \ \ y \ge 0, \ \ z \ge 0, \ \ x+y+z \le 1 \}$

Exercice 4: (2,5 points)

Considérons les segments de droites Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 définis par:

$\Gamma_1 = [OA]$, $\Gamma_2 = [AB]$ et $\Gamma_3 = [BO]$ où $O(0,0)$, $A(\pi,0)$ et $B(\pi,\pi)$.

Soit w la forme différentielle définie par : $w = y\sin x dx + x\cos y dy$

1-Calculer les intégrales curvilignes suivantes : $I_1 = \int_{\Gamma_1} w$, $I_2 = \int_{\Gamma_2} w$, $I_3 = \int_{\Gamma_3} w$

2-En déduire la valeur de l'intégrale $I = \oint_{\Gamma} y\sin x dx + x\cos y dy$ où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

3-Retrouver la valeur de I en utilisant le théorème de Green-Riemann.

4-Existe-t-il une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $w = df$?

Exercice 5: (2 points)

Soit le domaine $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1, \quad x > 0, \; y > 0 \}$

1-Dessiner D et calculer son aire en utilisant le changement de variables suivant : $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$

2-On considère que D est une plaque pesante, d'épaisseur négligeable et de masse surfacique $f(x,y) = 12\cos(9x^2 + 4y^2)$. Calculer alors la masse de D .

Exercice 6: (1,5 points)

Calculer le volume de la région de l'espace Ω limitée par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 2x$ et la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Exercice 7: (3,5 points)

Considérons les matrices carrées suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-Déterminer les réels a et b tels que : $A = aI + bJ$.

2-Exprimer J^2 en fonction de J. Déduire que $A^2 = -5J + 16I$

3-A partir de ce qui précède prouver que: $A^2 + 5A = -4I$.

4-Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

5-Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant: $\begin{cases} -3x + y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$

6-Déterminer dans chaque cas, toutes les matrices X (si elles existent) qui vérifient la relation donnée:

a) $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $XA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $JX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$