Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Calcul différentiel et intégral (MVA005)

Final 2019-2020 **3h**

Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Bikfaya, Nahr Ibrahim, Tripoli.

Exercice 1 (*16 points*)

Partie A : On considère la fonction f définie par

$$f(x) = [\ln(2+x)]^2$$

1. Donner le D.L de $f(x)$ en 0 à l'ordre 3.
2. Déduire l'équation de la droite tangente à la courbe de f en 0 ansi que sa position par rapport à la courbe au voisinage de 0.

Partie B : Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{1+e^{1/x}}$. À l'aide du D.L de $f(x)$ en $+\infty$, déterminer l'équation de l'asymptote de f ainsi que sa position par rapport à sa courbe.

SOLUTION. 1

Partie A : $f(x) = [\ln(2+x)]^2$

1. $f(x) = \left[\ln 2(1+\frac{x}{2})\right]^2 = \left[\ln 2 + \ln(1+\frac{x}{2})\right]^2 = (\ln 2)^2 + 2\ln 2.\ln(1+\frac{x}{2}) + \left[\ln(1+\frac{x}{2})\right]^2$ $\boxed{\text{2pts}}$

   $f(x) = (\ln 2)^2 + 2\ln 2\left[\frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{x}{2})^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right] + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)\right]$ $\boxed{\text{3pts}}$

   $f(x) = (\ln 2)^2 + 2\ln 2\left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x)\right] + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)\right]$. D'où

   $$f(x) = (\ln 2)^2 + (\ln 2)\frac{x}{2} + (1-\ln 2)\frac{x^2}{4} + (2\ln 2 - 3)\frac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x) \quad \boxed{\text{1pts}}$$

2. La droite tangente est $(T) : y = (\ln 2)^2 + (\ln 2)\frac{x}{2}$ $\boxed{\text{1pts}}$. Aussi, $f(x) - y \simeq (1-\ln 2)\frac{x^2}{4} > 0$ donc la courbe est au dessus de la tangente. $\boxed{\text{1pts}}$

Partie B: $f(x) = \dfrac{x+1}{1+e^{1/x}} = \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{1+e^{1/x}} = x\dfrac{1+t}{1+e^t}$ avec $t = \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $\boxed{\text{1pts}}$

$$\begin{aligned}\frac{1+t}{1+e^t} &= \frac{1+t}{2+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)} \quad \boxed{\text{1pts}}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}+\frac{7t^3}{24}+t^3\varepsilon(t) \quad \boxed{\text{2pts}}\end{aligned}$$

et donc

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + \frac{7}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x). \quad \boxed{\text{2pts}}$$

La courbe de f admet $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. $\boxed{\text{1pts}}$ Aussi, $f(x) - y \simeq -\frac{1}{4x} < 0$ donc la courbe est au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$. $\boxed{\text{1pts}}$

Exercice 2 (*20 points*) : On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$

1. Étudier le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possibles de (u_n) au cas où elle est convergente?
2. On suppose que $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$. Montrer que $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$ pour tout n, puis que (u_n) est croissante. En déduire qu' elle est convergente, préciser sa limite ?
3. On suppose que $u_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Montrer que $u_n \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ pour tout n, puis que (u_n) est décroissante. En déduire qu' elle est convergente, préciser sa limite ?
4. On suppose que $u_0 > \frac{3}{4}$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle serait sa limite ?

SOLUTION. 2

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$

1. $f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16}$: $\Delta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$; $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{3}{4}$ sont deux racines de $f(x) - x$. Ainsi le signe de $f(x) - x$ est donné par

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
$f(x) - x$	$+$ 0	$-$ 0	$+$

$\boxed{\text{1pts}}$

   Si (u_n) est convergente de limite égale à l alors $f(l) = l$ car f est continue. D'où $l = \frac{1}{4}$ ou $l = \frac{3}{4}$. $\boxed{\text{1pt}}$

2. Si $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$ alors en supposant par récurrence que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\frac{1}{4})$ car $f'(x) = 2x \geq 0$ pour $x \geq 0$ et f est croissante. $\boxed{\text{2pts}}$

$$\frac{3}{16} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$$

   donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$ et parsuite $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$. $\boxed{\text{1pt}}$
   D'autre part, sur $[0, \frac{1}{4}]$ on a $f(x) - x \geq 0$ donc $f(u_n) - u_n \geq 0$ $\boxed{\text{1pt}}$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ et (u_n) est croissante.$\boxed{\text{1pt}}$ Comme (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{4}$ donc elle est convergente et sa limite est obligatoirement $l = \frac{1}{4}$.$\boxed{\text{2pts}}$

3. Si $u_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ alors en supposant par récurrence que $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{4}$ alors $f(\frac{1}{4}) \leq f(u_n) \leq f(\frac{3}{4})$ $\boxed{\text{2pts}}$ et donc

$$\frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{4}$$

   donc $\frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{4}$ et parsuite $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.$\boxed{\text{1pt}}$
   D'autre part, sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ on a $f(x) - x \leq 0$ donc $f(u_n) - u_n \leq 0$ $\boxed{\text{1pt}}$ donc $u_{n+1} \leq u_n$ et (u_n) est décroissante.$\boxed{\text{1pt}}$ Comme (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{4}$ donc elle est convergente et sa limite est obligatoirement $l = \frac{1}{4}$.$\boxed{\text{2pts}}$

4. Si $u_0 > \frac{3}{4}$alors en supposant par récurrence que $u_n > \frac{3}{4}$ alors $f(u_n) > f(\frac{3}{4})$ c.à.d. $u_{n+1} > \frac{3}{4}$ et dans cette zone on a $f(x) - x > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire (u_n) est croissante $\boxed{\text{2pts}}$ et dans ce cas (u_n) va tendre vers l'infini $\boxed{\text{1pt}}$ car si elle devait être convergente sa limite devrait être $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ ce qui est impossible.$\boxed{\text{1pt}}$

Exercice 3 (*24 points*) : Calculer :

1. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+6x}}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}dx$

SOLUTION. 3

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+2)^2} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$. $\boxed{2\text{pts}}$ On a

$$\begin{cases} ax+2a+b = x+1 \\ a=1; \quad b=-1 \end{cases} \boxed{2\text{pts}}$$

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}dx = \ln(x+2) + \dfrac{1}{x+2} + c$ $\boxed{2\text{pts}}$

2. $\sqrt{x^2+6x} = \sqrt{(x+3)^2-9} = 3\sqrt{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 - 1}$. $\boxed{2\text{pts}}$ Soit $\frac{x+3}{3} = \cosh t$ donc $dx = 3\sinh t dt$ $\boxed{2\text{pts}}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+6x}}dx = \int \frac{3\sinh t dt}{3\cosh t - 3 + 3\sinh t} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^t - e^{-t}}{e^t - 1}dt \quad \boxed{2\text{pts}} \end{aligned}$$

Soit $X = e^t$ donc $dX = e^t dt = X dt$ et $dt = \frac{1}{X}dX$. $\boxed{1\text{pt}}$ Il en vient que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{X+1}{X^2}dX \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln X - \frac{1}{X}\right] + c \\ &= \frac{1}{2}\left[t - e^{-t}\right] + c \\ &= \frac{1}{2}\left[\arg\cosh(\frac{x+3}{3}) - \exp(-\arg\cosh(\frac{x+3}{3}))\right] + c \quad \boxed{2\text{pts}} \end{aligned}$$

3. On remarque que $f(\pi + x) = f(x)$, soit $t = \tan x$ donc $dt = (1+t^2)dx$ $\boxed{2\text{pts}}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\tan x} - 1\right)dx \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - 1\right)\frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{1-t}{t(1+t^2)}dt \quad \boxed{2\text{pts}} \end{aligned}$$

On a $\dfrac{1-t}{t(1+t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{1+t^2}$. $\boxed{1\text{pt}}$ Il en vient

$$\begin{cases} (a+b)t^2 + ct + a = 1-t \\ a+b=0; \quad c=-1; \quad a=1 \\ \text{donc} \qquad b=-a=-1 \end{cases} \boxed{2\text{pts}}$$

$I = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t+1}{1+t^2}dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \arctan t + c = \ln(\tan x) + \ln\cos x - x + c = \ln\sin x - x + c.$ 2pts

Exercice 4 (*20 points*) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$.Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

SOLUTION. 4

n a $\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xf(a+b-x)dx$. Soit $t = a+b-x,\ dt = -dx$ 4pts

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)dx &= \int_b^a (a+b-t)f(t)(-dt)\\ &= (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt \quad \boxed{2pts}\\ \int_a^b xf(x)dx &= (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \quad \boxed{2pts}\end{aligned}$$

Doù

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx \quad \boxed{2pt}$$

D'autre part, soit $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi xf(x)dx$ avec $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ vérifie $f(\pi-x) = f(x)$. 4pts D'où

$$\begin{aligned}I &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \quad \boxed{2pts}\\ &= -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}\\ &= -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^\pi\\ &= -\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] = (\frac{\pi}{2})^2. \boxed{4pts}\end{aligned}$$

Exercice 5 (*10 points*) Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

SOLUTION. 5

oit $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\text{2pts}}$ et soit $\omega = \sqrt{z} = re^{i\theta}$; donc $\omega^2 = r^2e^{i(2\theta)} = z = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Soit :

$$r = 1,\ 2\theta_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ pour } k = 0, 1. \boxed{\text{2pts}}$$

Les racines carrées de z sont

$$\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ et } \omega_1 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)} \quad \boxed{\text{2pts}}$$

D'autre part $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$donc

$$\begin{cases} \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \end{cases} \quad \boxed{\text{2pts}}$$

On obtient $2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ainsi $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.$\boxed{\text{2pts}}$

Exercice 6 (*10 points*) La répartition des salaires horaires en \$ de 200 ouvriers d'une entreprise se présente comme suit :

Salaires horaires	**Effectifs n_i**
$[7.5 - 10[$	20
$[10 - 15[$	60
$[15 - 20[$	80
$[20 - 30[$	40
Total	200

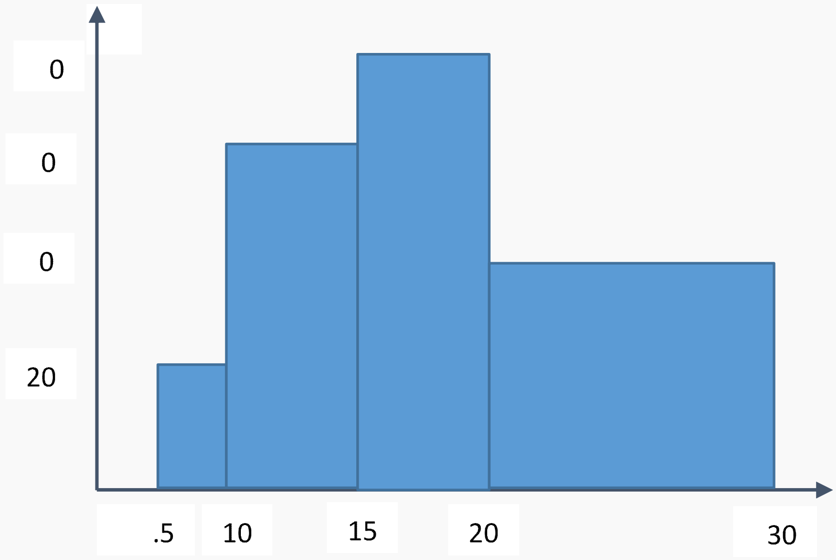
1. Représenter graphiquement la série statistique par un histogramme.
2. Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants.
3. Estimer le nombre d'ouvriers qui touchent moins que 19\$ l'heure.
4. Justifier que $[15 - 20[$ est la classe modale
5. On vous donne une estimation des paramètres statistiques

   Mode : $M_o = 16$; Médiane : $M_e = 17.5$; Moyenne : $\bar{x} = 16.625$; Écart type : $\sigma = 5.076$

   Expliquer la signification de chaque paramètre et commenter leurs valeurs.

SOLUTION. 6

1. $\boxed{\text{1pt}}$

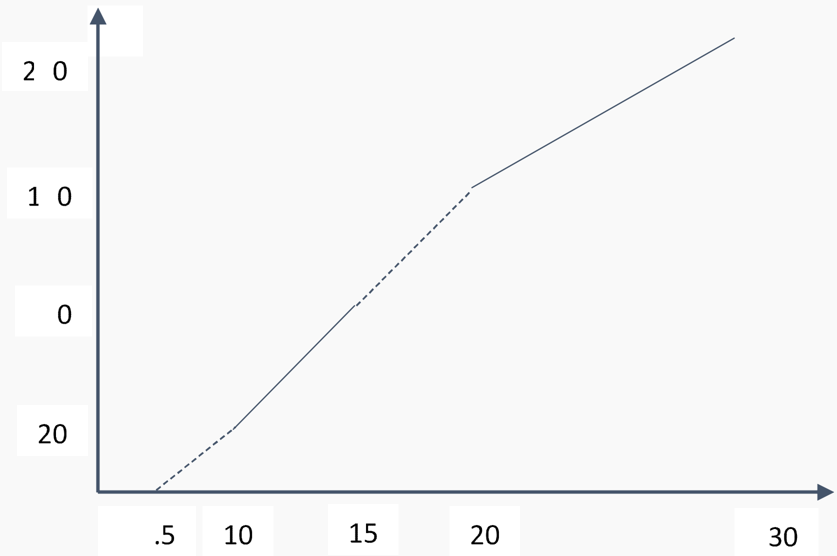


2. On donne d'abord les effectifs cumulés croissants :

Salaires horaires	**Effectifs cumulés n_{icc}**
$[7.5 - 10[$	20
$[10 - 15[$	80
$[15 - 20[$	160
$[20 - 30[$	200
Total	200

$\boxed{\text{2pts}}$

et le polygone cumulé croissant est : $\boxed{\text{1pt}}$



On a $19 \in [15, 20[$, donc le nombre x de personnes qui touchent moins que 19\$ l'heure, $x \in]80, 160[$. On a

$$19 = 15 + 5\frac{x - 80}{160 - 80}.$$

D'où $x = 144$ personnes. $\boxed{\text{2pts}}$

3. Les classes n'ont pas la même longueur. Les effectifs corrigés sont :

$$n_1 = \frac{20}{2.5} = 8;\ \ n_2 = \frac{60}{5} = 12;\ \ n_3 = \frac{80}{5} = 16;\ \ n_4 = \frac{40}{10} = 4. \ \ \boxed{\text{1pt}}$$

D'où la calsse modale est $[15-20[$

4. La plus grande masse touche environ 16$ l'heure ; la moitié des fonctionnaires touchent moins que 17.5$ l'heure ; Le valeur moyenne d'une heure de travail est evalué à 16.625$, la plus grande majorité touche environ 16.625$ plus ou moins 5$. $\boxed{\text{2pts}}$

   On trouve que cette série est homogène et le prix d'une heure de travail est à peu près le même et tourne autour de 16$. $\boxed{\text{1pt}}$

Exercice 7 (*20 pts*) 1. Résoudre : $y^{''}(x)+y(x)=e^x\cos x$

2. Soit l'équation de Bernouilli : $xy^{'}+y=y^2x^2 \quad (B)$
   (a) Vérifier que $y(x)=0$ est une solution de (B) et que les autres solution de (B) ne sont jamais nulles.
   (b) Donner la solution de (B) dont la courbe passe par le point $(1,2)$.

SOLUTION. 7

1. Soit l'équation $y^{''}(x)+y(x)=e^x\cos x$ (E). La S.G. de (E) est $y=y_g+y_p$ avec y_g est la S.G. de l'équation homogène associée à (E) :

$$y^{''}(x)+y(x)=0 \quad (S)$$

dont l'équation caractéristique est $\lambda^2+1=0 \quad (C)$. On a $\lambda=i$ est une racine de (C) et parsuite

$$y_g=a\cos x+b\sin x, \quad a,b\in\mathbb{R} \quad \boxed{\text{4pts}}$$

y_p est une S.P. de (E). On a $f(x)=e^x\cos x\equiv e^{\alpha x}(P_0(x)\cos\beta x+Q_{-\infty}(x)\sin\beta x)$. Comme $\alpha+i\beta=1+i$ n'est pas une racine de (C) alors on pose

$$y_p=e^x(a\cos x+b\sin x); \quad a,b \text{ sont à déterminer dans } \mathbb{R}. \quad \boxed{\text{2pts}}$$

On a $y_p^{'}(x)=y_p+e^x(-a\sin x+b\cos x)$; $y_p^{''}(x)=y_p^{'}+e^x(-a\sin x+b\cos x)-y_p=2e^x(-a\sin x+b\cos x)$. D'après l'équation (E) on a

$$\begin{aligned}2e^x(-a\sin x+b\cos x)+e^x(a\cos x+b\sin x) &= e^x\cos x\\ (b-2a)\sin x+(a+2b)\cos x &= \cos x\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} b-2a=0\\ a+2b=1\end{cases} \quad \boxed{\text{2pts}}$$

$a=\frac{1}{5}$ et $b=\frac{2}{5}$, donc $y_p=\frac{e^x}{5}(\cos x+2\sin x)$ et parsuite

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{e^x}{5}(\cos x+2\sin x), \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}. \quad \boxed{\text{2pts}}$$

2. Soit l'équation de Bernouilli : $xy^{'}+y=y^2x^2 \quad (B)$
   (a) si $y(x)=0$ alors $y^{'}(x)=0$ et ceci vérife (B) donc $y(x)=0$ est une solution de (B). $\boxed{\text{1pt}}$
   D'autre part, par divsion de (B) par y^2 on trouve : $xy^{'}y^{-2}+y^{-1}=x^2 \quad (E)$. En posant $z(x)=y^{-1}(x)$, on a $z^{'}(x)=-y^{-2}y^{'}$ $\boxed{\text{2pts}}$ et l'équation (E) devient

$$-xz^{'}+z=x^2$$

soit

$$z' - \frac{1}{x}z = -x \quad (L) \ \boxed{\text{1pt}}$$

La S.G.de l'ESSM associée à (L) est $z = k\exp\int \frac{1}{x}dx = kx, \quad k \in \mathbb{R}.$ $\boxed{\text{2pts}}$
En posant $z = f(x).x$ comme S.G. de (L) on trouve $f'(x).x = -x$ et $f(x) = -x + c$.
D'où la S.G. de (L) est :

$$z = -x^2 + cx, \quad c \in \mathbb{R} \ \boxed{\text{2pts}}$$

On en déduit que la S.G. de (B) est : $y = \dfrac{1}{-x^2 + cx}$ qui n'est jamais nulle. $\boxed{\text{1pt}}$

(b) La courbe qui passe par le point $(1,2)$ vérifie : $2 = \dfrac{1}{-1+c}$ et donc $c = \frac{3}{2}$ parsuite $y = \dfrac{1}{-x^2 + \frac{3}{2}x}$. $\boxed{\text{1pt}}$