Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam
Liban

Calcul différentiel et intégral (MVA005)

Partiel 2019-2020 **1h30**

Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Bikfaya, Nahr Ibrahim, Tripoli.

Exercice 1 (*30 points*) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = |x(x+3)| - |x(x-3)| - 5x$$

1. Donner pour chacun des intervalles $]-\infty, -3[,\ ]-3, 0[,\ ]0, 3[,\ ]3, +\infty[$ une expression de $f(x)$ sans la valeur absolue.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable en un point ? Montrer qu'elle est impaire.
3. Faire le tableau de variation de f
4. Déterminer le maximum et le minimum de $f(x)$ sur $[-2, 3]$ (on exprimera les résultats sous forme de fraction simplifiée)

SOLUTION. 1

Soit $f(x) = |x(x+3)| - |x(x-3)| - 5x$

1. On sait que :

$$\begin{cases} x(x+3) \geq 0 & \text{si} \quad x \leq -3 \text{ ou } x \geq 0 \\ x(x+3) \leq 0 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} x(x-3) \geq 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 \\ x(x-3) \leq 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \end{matrix} \quad \boxed{1 \text{ pts}}$$

Ainsi :

pour $x < -3$ donc $x \leq 0$ on a $|x(x+3)| = x(x+3)$ et $|x(x-3)| = x(x-3)$ donc $f(x) = x^2 + 3x - x^2 + 3x - 5x = x$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

pour $-3 < x < 0$ on a $|x(x+3)| = -x(x+3)$ et $|x(x-3)| = x(x-3)$ donc $f(x) = -x^2 - 3x - x^2 + 3x - 5x = -2x^2 - 5x$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

pour $0 < x < 3$ on a $|x(x+3)| = x(x+3)$ et $|x(x-3)| = -x(x-3)$ donc $f(x) = x^2 + 3x + x^2 - 3x - 5x = 2x^2 - 5x$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

pour $x > 3$ on a $|x(x+3)| = x(x+3)$ et $|x(x-3)| = x(x-3)$ donc $f(x) = x$. $\boxed{2 \text{ pts}}$ En résumé :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < -3 \text{ ou } x > 3 \\ -2x^2 - 5x & \text{si} \quad -3 < x < 0 \\ 2x^2 - 5x & \text{si} \quad 0 < x < 3 \end{cases}$$

2. Tout polynome est continue sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \to |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ $\boxed{1 \text{ pts}}$. Pour la dérivabilité il suffit de la vérifier sur les points qui séparent les branches de $f(x)$ car en dehors de ces points on a des polynômes qui sont dérivables $\boxed{1 \text{ pts}}$.

Au point $x_0 = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x+3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-2x^2 - 5x + 3}{x+3} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \to -3} (-4x - 5) = 7$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

Au point $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2x^2 - 5x}{x} = -5$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 5x}{x} = -5$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

Au point $x_0 = 3$: $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x-3} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \to 3} (4x - 5) = 7$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x-3} = 1$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

Comme $f_g'(-3) \neq f_d'(-3)$; $f_g'(0) = f_d'(0)$; $f_g'(3) \neq f_d'(3)$ alors f est dérivable en 0 mais elle ne l'est ni en -3 ni en 3 $\boxed{3 \text{ pts}}$.

D'un autre coté le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ donc centré en O $\boxed{1 \text{ pts}}$.et

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x(-x+3)| - |-x(-x-3)| + 5x \\ &= |x(x-3)| - |x(x+3)| + 5x \\ &= -\left[|x(x+3)| - |x(x-3)| - 5x\right] \\ &= -f(x) \quad \boxed{2 \text{ pts}}. \end{aligned}$$

et parsuite f est impaire.

3. On a

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -3 \text{ ou } x > 3 \\ -4x - 5 & \text{si} \quad -3 < x < 0 \\ 4x - 5 & \text{si} \quad 0 < x < 3 \end{cases}$$

et le tableau de variation est

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{4}$		0		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{25}{8}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

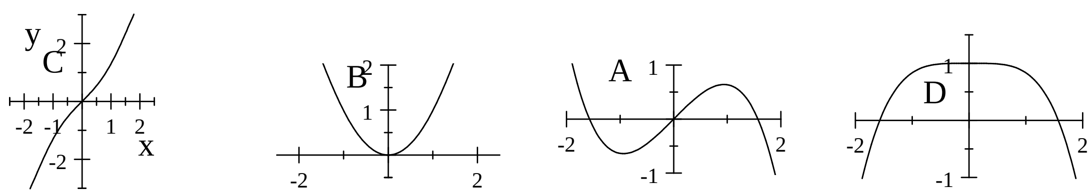
$\boxed{5 \text{ pts}}$

4. La plus grande valeur de f sur $[-2, 3]$ est $\frac{25}{8}$ atteinte au point $x_1 = -\frac{5}{4}$ et la plus petite valeur de f sur $[-2, 3]$ est $-\frac{25}{8}$ atteinte au point $x_2 = \frac{5}{4}$ $\boxed{2 \text{ pts}}$.

Exercice 2 (*45 points*) : On considère les fonctions

$$\begin{cases} f_1(x) = \cos x \; chx & f_2(x) = \cos x \; shx \\ f_3(x) = \sin x \; chx & f_4(x) = \sin x \; shx \end{cases}$$

dont voici, en désordre, les courbes représentatives autour de 0 :



1. Compléter le tableau suivant et retrouver le nom de la courbe représentative de chaque

fonction

$f(x)$	$f(0)$	parité	courbe
$f_1(x)$			
$f_2(x)$			
$f_3(x)$			
$f_4(x)$			

2. Calculer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0, de $f_2(x)$
3. Calculer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0, de $f_3(x)$
4. En utilisant les deux développements ci - dessus, quel est l'ordre du développement limité au voisinage de 0 que vous pourriez obtenir pour la fonction $f(x) = \dfrac{f_2(x)}{f_3(x)}$. Donner ce développement limité pour $f(x)$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Donner la fonction $g(x)$, le prolongement de f par continuite en 0.

SOLUTION. 2

1.

$f(x)$	$f(0)$	parité	courbe
$f_1(x)$	1	paire	D
$f_2(x)$	0	impaire	A
$f_3(x)$	0	impaire	C
$f_4(x)$	0	paire	B

1iere colonne $4 \times 1 = 4pts$
2ieme colonne $4 \times 1 = 4pts$
3ieme colonne $4 \times 1.5 = 6pts$

2. $f_2(x) = \cos x \ shx = (1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x))(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)) = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + x^5\varepsilon(x)$ $\boxed{6 \text{ pts}}$.
3. $f_3(x) = \sin x \ chx = (x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x))(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)) = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + x^5\varepsilon(x)$ $\boxed{6 \text{ pts}}$.
4. On a $\dfrac{f_2(x)}{f_3(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{0}{0}$ et comme le premier terme du D.L de $f_2(x)$ est de degré $1 \geq$ au degré du premier terme du D.L de $f_3(x)$ alors le D.L de $\dfrac{f_2(x)}{f_3(x)}$ existe en 0 et comme f_2 et f_3 sont devéloppés à l'ordre 5 et comme le premier terme du D.L de $f_3(x)$ est de degré 1 alors le D.L que l'on peut obtenir pour $f(x)$ en 0 est à l'ordre $5 - 1 = 4$. $\boxed{4 \text{ pts}}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + x^5\varepsilon(x)}{x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + x^5\varepsilon(x)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 + x^4\varepsilon(x)}{1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 + x^4\varepsilon(x)} \\ &= 1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + x^4\varepsilon(x) \quad \boxed{10 \text{ pts}}. \end{aligned}$$

d'après la division dans l'ordre croissant ci-dessous

$$\begin{array}{c|c} 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 & 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 \\ \cline{2-2} 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 & 1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 \\ \hline -\frac{2}{3}x^2 & \\ -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^4 & \\ \hline \frac{2}{9}x^4 & \end{array}$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + x^4\varepsilon(x)] = 1$ finie donc f est prologeable par continuité en 0 $\boxed{3\text{ pts}}$.et son prolongement est

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x\ shx}{\sin x\ chx} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \boxed{2\text{ pts}}.$$

Exercice 3 (*25 points*) : On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de re'currence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de u.
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

SOLUTION. 3

1. On a $u_0 \geq 1$, supposons par récurrence que $u_n \geq 1$ alors $\ln(u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n) \geq 1$. Parsuite (u_n) est bien définie et elle est minorée par 1 $\boxed{5\text{ pts}}$.
2. Soit $g(x) = f(x) - x$, on a $g^{'}(x) = \frac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} < 0$ .pour tout $x > 1$ $\boxed{2\text{ pts}}$ et $g(x)$ est décroissante sur cet intervalle et donc sa valeur maximale est $g(1) = 1 + \ln 1 - 1 = 0$ $\boxed{2\text{ pts}}$ parsuite $g(x) \leq 0, \ \forall x \in [1, +\infty[$. $\boxed{5\text{ pts}}$.
3. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$ parsuite (u_n) est décroissante $\boxed{4\text{ pts}}$.
4. La suite (u_n) est décroissante minorée donc elle est convergente, soit $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.$\boxed{4\text{ pts}}$. Comme f est continue sur $[1, +\infty[$ alors $l = f(l)$ $\boxed{1\text{ pts}}$., soit $l = 1 + \ln(l)$ donc $l - \ln(l) = 1$ et parsuite $l = 1$.$\boxed{2\text{ pts}}$.