Institut Supérieur des Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen partiel 2018-2019 - Semestre I **Durée : 1h :30**

Centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Chtoura,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

DOCUMENTS INTERDITS

Sujets Coordonnés par : Dr. Noureddine ASSAAD

SOLUTIONS

Exercice 1 (20 points) Questions indépendantes

1. Montrer que $f(x) = x \ln|x|$ est impaire sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ($6pts$)
2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+b} - \sqrt{a^2+b}}{x-a^2}$, où a et b sont deux nombres réels quelconques. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers a^2 ($8pts$)
3. Étudiez la convergence de la suite de terme général : $u_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ où a et b sont deux réels donnés avec $a > b$. ($6pts$)

Solution1

1. On a $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = (-x)\ln|-x| = -x \ln|x| = -f(x)$ $\boxed{\text{2 points}}$
   donc $f(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$
   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \ln|x| = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln|x| = \infty$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. Pour $x = a^2$ on obtient une forme indéterminée $\left(\dfrac{0}{0}\right)$
   Pour $x \neq a^2$:
   $$f(x) = \frac{\sqrt{x+b} - \sqrt{a^2+b}}{x-a^2} \times \frac{\sqrt{x+b} + \sqrt{a^2+b}}{\sqrt{x+b} + \sqrt{a^2+b}} \quad \boxed{\text{3 points}}$$
   $$= \frac{(x-a^2)}{(x-a^2)\left(\sqrt{x+b} + \sqrt{a^2+b}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+b} + \sqrt{a^2+b}\right)} \quad \boxed{\text{2 points}}$$
   Donc $f(x) \underset{x \to a^2}{\to} \dfrac{1}{2\sqrt{a^2+b}}$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $\ln u_n = \dfrac{1}{n} \ln(a^n + b^n) = \dfrac{1}{n} \ln\left(a^n\left(1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)\right) = \ln a + \dfrac{1}{n} \ln\left(1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)$ $\boxed{\text{3 points}}$
   comme $\dfrac{b}{a} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = 0$
   par conséquent $\lim\limits_{n \to \infty} \ln u_n = \ln a$ et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a.$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 2 (20 points) Etudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solution2

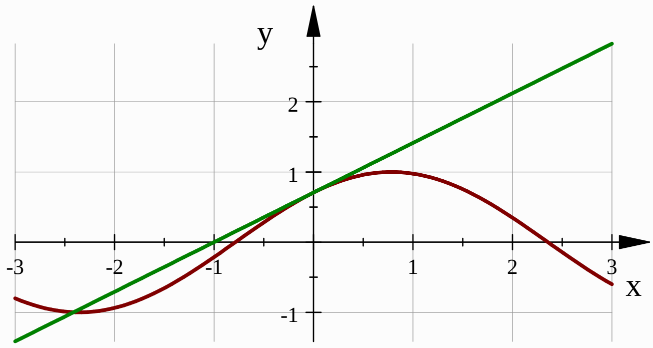
1. $\sin \dfrac{1}{x}$ est une fonction bornée : $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^3 \sin \dfrac{1}{x} \right) = 0 = f(0)$. Donc f est continue au point $x = 0$ 10 points
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$ alors $f(x)$ est dérivable au point $x = 0$. 10 points

Exercice 3 (20 points) On considère la fonction $f(x) = \sin \left(x + \dfrac{\pi}{4} \right)$.

1. Montrer que $f(x)$ s'écrit $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$ $(2pts)$
2. Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 5 de $f(x)$. (pts)
3. Déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 0$ et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente. $(5pts)$
4. En faisant un changement convenable de variable, déduire $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$ $(8pts)$

Solution3

1. $\sin \left(x + \dfrac{\pi}{4} \right) = \sin x \cos \dfrac{\pi}{4} + \sin \dfrac{\pi}{4} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$ 2 points
   $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left(\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \varepsilon x^5 \right) + \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \varepsilon x^5 \right) \right)$
   $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \varepsilon x^5 \right)$ 5 points
2. L'équation de la droite tangente au point $x = 0$ est $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (1 + x)$ 3 points
   Au voisinage de 0 on a $f(x) - y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left(-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \varepsilon x^5 \right)$
   Le signe de$(f - y)$ est celui de $-\dfrac{x^2}{2}$, donc $f(x) - y < 0$, par conséquence, la courbe de f est au déssous de la tangente. 2 points



3. Soit $g(x) = \sin x$, Posons $x = t + \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{2 points}}$ d'où

$$g(x) = f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \varepsilon t^5\right)$$

$$= \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5\right)$$

$\boxed{\text{2 points}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5\right)$$

$$\frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} \quad = \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{4!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{5!} + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)$$

$\boxed{\text{2 points}}$

Alors $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 4 (20 points) Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} & u_0 &= a \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} & v_0 &= b \end{aligned} \tag{1}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs positives et que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($8pts$)
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. ($8pts$)
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.($4pts$)

Solution4

1. Montrons par récurrence que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs positives.

La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $0 < a < b$. $\boxed{\text{2 points}}$

Supposons la propriété vraie pour un entier n donné et montrons que la propriété est alors vraie pour l'entier suivant.

Si $u_n \geq 0$ et si $v_n \geq 0$ alors $\sqrt{u_n v_n} \geq 0$ et $\dfrac{u_n + v_n}{2} \geq 0$ et par conséquent $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \geq 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

Par ailleurs, pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$v_n - u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}}\right)^2 \geq 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

Puisque $v_n - u_n \geq 0$ on en déduit que $v_n \geq u_n$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $u_{n+1} - u_n$ est positive.

   D'après ce qui précède, on a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n \geq \sqrt{u_n u_n} - u_n = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Pour montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $v_{n+1} - v_n$ est négative. On a :

   $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$

   Or $v_n \geq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$ et $v_n \leq v_0$.

   D'après la première question, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ $\boxed{\text{2 points}}$ ce qui permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0 et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. $\boxed{\text{2 points}}$

3. Pour montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, il reste à vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$

   Soit $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et donc et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1}$

   On a $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc si $n \to \infty$: $\ell_2 = \dfrac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \Longrightarrow \ell_1 = \ell_2$ $\boxed{\text{2 points}}$

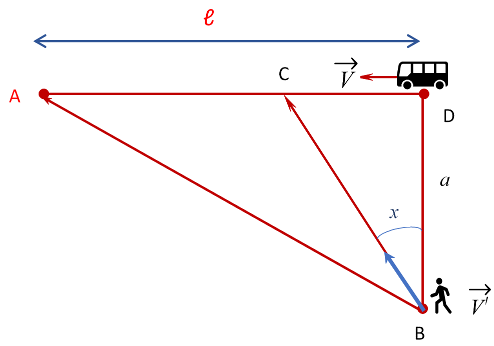
   par conséquent que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite. Cela implique que

   $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n - \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell_2 - \ell_1 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 5 (20 points) Un piéton qui est en un point B veut aller en A, en prenant au passage un autobus le long d'une route.

Chercher la position du point C où ce piéton doit prendre l'autobus pour qu'il arrive en A dans le temps minimal. La vitesse de l'autobus est V, celle du piéton est $V' < V$. En prenant comme variable l'angle $x = \widehat{DBC}$.

La distance de l'autobus (D) au point A est $DA = \ell$, la distance du piéton à l'autobus est $BD = a$.



Solution5

La durée totale du parcours de B à C puis à A est $t = \dfrac{BC}{V'} + \dfrac{CA}{V}$ $\boxed{\text{3 points}}$

D'après la géométrie de la figure on a : $\cos x = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{a}{BC}$ soit $BC = \dfrac{a}{\cos x}$ et $\tan x = \dfrac{DC}{a}$ donc $DC = a \tan x$ $\boxed{\text{3 points}}$

$CA = DA - DC = \ell - a \tan x$ $\boxed{\text{2 points}}$

alors $t = \dfrac{a}{V' \cos x} + \dfrac{\ell - a \tan x}{V}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{a \sin x}{V' \cos^2 x} - \dfrac{a}{V \cos^2 x}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$\dfrac{dt}{dx} = 0$ si $\dfrac{1}{V'} \sin x - \dfrac{1}{V} = 0$ donc si $\sin x = \dfrac{V'}{V}$ $\boxed{\text{4 points}}$

Remarque

Si on donne à x une valeur inférieure à la valeur critique , par exemple $\sin x = 0$,on aura $\cos x = 1$ donc $\dfrac{dt}{dx} < 0$ et comme $\dfrac{dt}{dx}$ s'annule ensuite, c'est bien un minimum.