Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen Partiel 2016-2017 **Durée : 1h :30**

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Attention

Documents et Téléphones : STRICTEMENT INTERDITS

Exercice 1 (10 points) Vrai ou Faux, justifier.

Chaque réponse correcte rapport 2 points, Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève 1 point.

1. Si $\lim_{x\to 0+} f(x) = +1$ et $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$ alors f est continue au points $x = 0$.
2. Si $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ alors $\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v^2}{u'v - uv'}$
3. Si $f(x)$ est une fonction périodique de période T alors $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$
4. Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1^x} = \infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x} = +\infty$
5. Le théorème de Rolle est applicable pour la fonction $f(x) = x^{2/3}$ sur $[-8, 8]$

SOLUTION 1

1. $\boxed{FAUX}$: f est continue au points $x = 0$ si $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$.
2. $\boxed{FAUX}$: $\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - vu'}{u^2}$
3. $\boxed{VRAI}$: $f(x) = f(x + kT), \forall k \in \mathbb{Z}$.
4. $\boxed{FAUX}$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$, (par comparaison si x est grand $x^2 < 2^x$)
5. $\boxed{FAUX}$ f n'est pas dérivable au point $x = 0$.

Exercice 2 ($3 \times 5 = 15$ points) : Questions indépendantes :

1. Si $y(x) = x^2 e^x$ montrer que $\frac{d^n y}{dx^n} = \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) e^x$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = nf(1)$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique telle que : $u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^4+4}}$, Montrer que u_n est convergente et calculer sa limite.
4. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)$
5. Calculer la dérivé de la fonction $g(x) = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x}}$

SOLUTION 2

1. $n=1: \dfrac{dy}{dx} = 2xe^x + x^2e^x = \left(x^2+2x\right)e^x = \left(x^2+2\times 1x + 1\times(1-1)\right)e^x$

   $n=2: \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(2x+2+x^2+2x\right)e^x = \left(x^2+2\times 2x+2(2-1)\right)e^x$

   Supposons que $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \left(x^2+2nx+n(n-1)\right)e^x$ alors :

   $\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \left(2x+2n+x^2+2nx+n(n-1)\right)e^x = \left(x^2+2(n+1)x+n(n+1)\right)e^x$

2. On a $n = \sum\limits_{k=1}^{n}(1)$: donc $f(n) = f\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(1)\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(1) = nf(1)$.

   Ou bien : $f(1) = 1\times f(1),\ \ f(2) = f(1+1) = f(1)+f(1) = 2f(1)$
   Soit $f(n) = nf(1)$ *alors* $f(n+1) = f(n)+f(1) = nf(1)+f(1)$

3. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\ln x < x$ d'où : $0 < u_n < v_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^4+4}}$

   La suite v_n est convergente et tend vers zéro Donc il en est de même de (u_n)

4. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\ \dfrac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

5. $g(x) = \sqrt{x^2+2\sqrt{x}} = \left(x^2+2\sqrt{x}\right)^{1/2}$

   on a $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $\dfrac{d\sqrt{x}}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   $u = x^2+2\sqrt{x} \Longrightarrow u' = 2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   $g'(x) = \dfrac{2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}} = \dfrac{2x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}}$

Exercice 3 (10 points) Vérifier le théorème de Lagrange sur la fonction

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

sur $[0,4]$

SOLUTION 3

La fonction $f(x)$ est continue sur $[0,4]$ et est dérivable sur $]0,4[$, *1 point*

$f(4) = 6$ et $f(0) = -6$ *1 point*

$f(x) = x^3-6x^2+11x-6$ donc $f'(x) = 3x^2-12x+11$ existe sur $]0,4[$ *2 points*

Alors $\exists c \in]0,4[$ tel que $\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0} = f'(c)$ *2 points*

c.à.d. $f'(c) = 3c^2-12c+11 = \dfrac{6+6}{4} = 3 \Longrightarrow 3c^2-12c+8 = 0$ *2 points*

$c = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-24}}{3} = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{3}$

$c_1 = \dfrac{6+\sqrt{12}}{3} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3} + 2 = 3.155 \in]0,4[$ 1 point et $c_2 = \dfrac{6-\sqrt{12}}{3} = 0.8453 \in]0,4[$ 1 point

Exercice 4 (20 points) Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la relation de réccurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$$
$$et\ u_0 = 1$$

1. Soit $(v_n)_n$ la suite de terme générale $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite v_n est une suite géométrique. Exprimer v_n en fonction de n
2. Soit (S_n) la suite de terme générale : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Déterminer la limite de S_n.
3. En déduire que la suite u_n est convergente et déterminer sa limite

SOLUTION 4

1. On a $v_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+3}{2} - \dfrac{u_{n-1}+3}{2} = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{2} = \dfrac{v_{n-1}}{2}$ 2 points

   v_n est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ 2 points

   donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = v_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 1 point

   $v_0 = u_1 - u_0 = \dfrac{u_0+3}{2} - u_0 = 1$ 1 point

   finalement $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ 2 points
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \dfrac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ 2 points

   $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$ 3 points
3. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0 = u_n - 1$ 3 points

   $u_n = S_n + 1$ 1 point

   $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n + 1 = 2 + 1 = 3$ 3 points

Exercice 5 (30 points) Considérons la fonction

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer qu'elle est impaire.
2. Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$, en déduire $\lim_{x\to -1} f(x)$

3. En déduire la fonction $g(x)$, le prolongement par continuité de f. La fonction g est-elle dérivable en 1 ?.
4. Déterminer l'asymptote à la courbe de f
5. Soit $D_1 =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Pour tout $x \in D_1$ posons $h(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}$
   (a) En étudiant la fonction h, montrer que l'on a $h(x) > 0$ pour tout $x \in]1,+\infty[$ et qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $h(x) < 0$ pour $x \in]0,\alpha[$ et $h(x) > 0$ pour $x \in]\alpha,1[$
   (b) Montrer que pour tout $x \in D_1$ on a $f'(x) = 2xh(x)$.

Bonus Dresser le tableau de variations de f. Calculer $f'(0)$ et tracer la courbe de f.

SOLUTION 5

1. La fonction $f(x)$ est définie pour $x \neq \pm 1$ donc son domaine est $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ 2 points
   $f(-x) = \left((-x)^2 - 1\right)\ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right| = \left(x^2-1\right)\ln\left|\frac{-x+1}{x+1}\right| = -\left(x^2-1\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -f(x)$
   2 points
   Pour tout $x \in D$: $f(x)$ est impaire
2. $f(x) = (x+1)(x-1)(\ln|x+1| - \ln|x-1|)$
   on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1) = 0$ par suite $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ 2 points
   Comme la fonction $f(x)$ est impaire on a aussi $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$ 2 points
3. La fonction $f(x)$ n'est pas continue en $x = \pm 1$ mais $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ donc elle est prolongeable par continuité 2 points

$$g(x) = \begin{cases} \left(x^2-1\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| & si \quad x \neq \pm 1 \\ 0 & si \quad x = -1 \\ 0 & si \quad x = +1 \end{cases}$$ 2 points

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)(\ln(1+x) - \ln|x-1|)$$

   Puisque $\lim\limits_{x\to 1}\ln|x-1| = -\infty$, la fonction $g(x)$ n'est pas dérivable en $x = 1$. 2 points
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(x^2-1\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$
   posons $t = \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ 1 point
   $F(t) = \frac{1/t^2 - 1}{1/t}\ln\left|\frac{1/t+1}{1/t-1}\right| = \frac{1-t^2}{t}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \left(1-t^2\right)\left(\frac{\ln|1+t|}{t} - \frac{\ln|1-t|}{t}\right)$ 1 point
   On a $\lim\limits_{t\to 0}\left(1-t^2\right) = 1$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln|1+t|}{t} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln|1-t|}{t} = -1$ 1point
   donc : $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1(1-(-1)) = 2$ 1 point
   d'où $y = 2x$ est l'asymptote à la courbe de f. 1 point
5. $h(x) = \ln(x+1) - \ln|1-x| - \frac{1}{x}$

(a) $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2(1-x^2)}$ *2 points*

La fonction h est donc strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ *2 points*

$\lim\limits_{x\to 0} h = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}(h) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(h) = 0$ *2 points*

Puisque h est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique nombre $\alpha \in]0,1[$ tel que $h(\alpha) = 0$, alors $h(x) < 0$ pour $x \in]0,\alpha[$ et $h(x) > 0$ pour $x \in]\alpha,1[$. *1 point*

x	0		α		1		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$		$+\infty \searrow$	
	$-\infty$						0

2 points

(b) pour $x \in D_1$: $f'(x) = 2x\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + (x^2-1)\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x}\right) = 2x\ln\dfrac{1}{|x-1|}|x+1| - 2 = 2xh(x)$ *2 points*

donc sur D_1 : $f'(x)$ a le signe de $h(x)$.

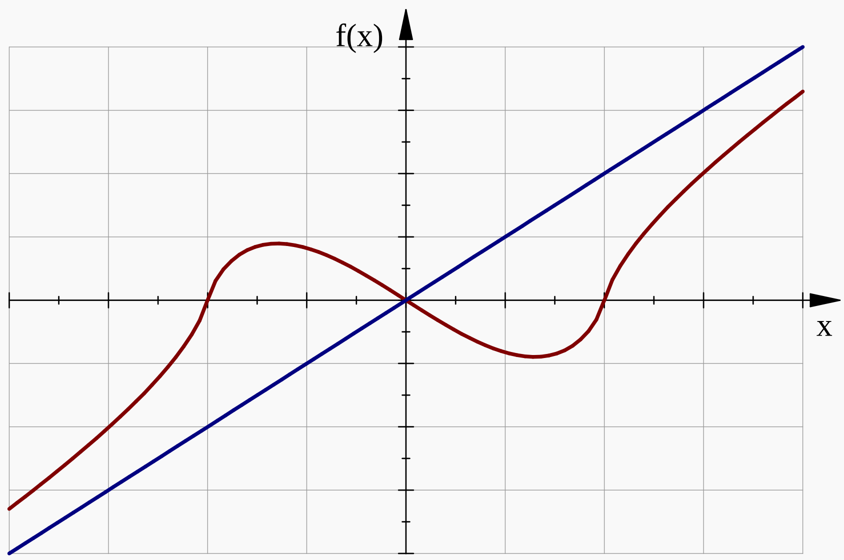
BONUS Tableau de variations de f

1.

x	0	α		1	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow 0$		$0 \nearrow +\infty$

2 points

Le calcul de $f(x)$ mené dans la question précédente montre que $f'(0) = -2$ *1 point* Comme la fonction f est impaire, la courbe de f a pour centre de symétrie l'origine des axes.

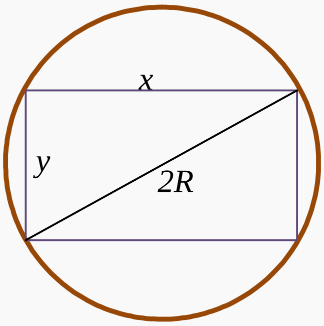


2 points

Exercice 6 Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire maximale que nous pouvons inscrire à l'intérieur d'un cercle de rayon R

SOLUTION 6

Soit x et y les longueurs des côtés du rectangle. L'aire du rectangle est $A = xy$ *1 point*



1 point

d'àprès le théorème de Pythagor on a $x^2 + y^2 = 4R^2 \Longrightarrow y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ *1 point*

($y > 0$ car il représente une longueur), donc $A = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ et $x \in [0, 2R]$ *2 points*

$\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x\sqrt{4R^2 - x^2}\right) = \dfrac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$ *3 points*

$A'(x) = 0$ si $4R^2 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2}R$ *1 points*

$A' > 0$ si $0 < x < \sqrt{2}R$ et $A' < 0$ si $\sqrt{2}R < x < 2R$ *1 points*

Pour $x = \sqrt{2}R$: $A = \left(\sqrt{2}R\right)\sqrt{4R^2 - 2R^2} = 2R\sqrt{R^2} = 2R^2$ *1 points*

x	0		$\sqrt{2}R$		$2R$
A'	$\nexists$		0		$\nexists$
A	0	$\nearrow$	$Max = 2R^2$	$\searrow$	0

2 points

L'aire du rectangle est maximale lorsque $x = R\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2}R$ *2 points*