le cnam Liban

Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen Final 2016-2017 **Durée : 2h :00**

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

SOLUTIONS

Exercice 1 (20 points) :

1. Donner le D.L de $\dfrac{1}{1+x}$ en l'infini à l'ordre 3.
2. Déduire le D.L de $\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ en l'infini à l'ordre 2.
3. Déterminer l'equation de l'asymptote à la courbe de la fonction $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$, ainsi que sa position relativement à la courbe.

SOLUTION 1

1. $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x(1+1/x)} = \dfrac{t}{1+t}; \quad t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *2 points*
   $\dfrac{t}{1+t} = t - t^2 + t^3 + t^3\varepsilon(t) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(x)$ *3 points*
2. $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$
   Soit $u = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$
   $\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$ *2 points*
   $= \left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^2\varepsilon(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$ *4 points*
3. $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = x\left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right)$
   $= -1 + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -1$ *4 points*
   Donc $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f. *1 point*
   $$f(x) - y \simeq \frac{1}{2x}$$
   - Au voisinage de $+\infty$ l'asymptote est au **dessous** la courbe *2 points*
   - Au voisinage de $-\infty$ l'asymptote est au **dessus** la courbe *2 points*

Exercice 2 (30 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$$

1. Intégrer par parties $I_{n,p}$ pour établir la relation :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}$$

sachant que $[x^\alpha (\ln x)^\beta]_{(0)} = 0$ pour tous $\alpha, \beta > 0$.

2. Sachant que $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, montrer que

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

3. Déduire, $\int_0^1 x^3 (\ln x)^2 dx$

SOLUTION 2

1. Intégration par parties : $\begin{cases} u = (\ln x)^p & \Longrightarrow du = p\dfrac{(\ln x)^{p-1}}{x} \\ dv = x^n dx & \Longrightarrow v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ *5 points*

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^p \Big|_0^1 - \frac{p}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

On a $\ln(1) = 0$ et $\left(x^{n+1} (\ln x)^p\right)_{(0)} = 0$ donc $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^p \Big|_0^1 = 0$, *2 points*

Soit $I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1} \displaystyle\int_0^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx = -\dfrac{p}{n+1} I_{n,p-1}$ *5 points*

2. On a

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1} = \left(-\frac{p}{n+1}\right)\left(-\frac{p-1}{n+1} I_{n,p-2}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{n+1}\right)\left(-\frac{p-1}{n+1}\right)\left(-\frac{p-2}{n+1} I_{n,p-3}\right) \\ &\vdots \\ &= \left(-\frac{p}{n+1}\right)\left(-\frac{p-1}{n+1}\right)\left(-\frac{p-2}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{2}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n+1}\right) I_{n,0} \\ &= \left(-\frac{p}{n+1}\right)\left(-\frac{p-1}{n+1}\right)\left(-\frac{p-2}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{2}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad \boxed{5 \text{ points}} \\ &= \frac{(-1)\, p \times (-1)\,(p-1) \times \cdots \times (-1)\, 2 \times (-1)\,(1)}{(n+1)\,(n+1) \cdots (n+1)} \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}} \quad \boxed{5 \text{ points}} \end{aligned}$$

3. En utilisant la dernière formule, avec $n = 3$ et $p = 2$, on trouve ;

$\int_0^1 x^3 (\ln x)^2 dx = \dfrac{(-1)^2 (2!)}{(3+1)^3} = \dfrac{1}{32}$ *5 points*

Exercice 3 (25 points) L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique avec résistance de l'air est :

$$x'' + \omega^2 x + r x'|x'| = 0 \tag{1}$$

où $x = x(t)$ est la position à l'instant t , ω^2et r sont deux paramètres positifs. Soit $v(x(t)) = x'(t)$ la vitesse au point $x(t)$.

1. Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation de Bernoulli.

$$v'(x) + \sigma r v(x) = -\omega^2 x v^{-1} \tag{2}$$

   où $\sigma = \dfrac{|v|}{v} = \pm 1$ (σ désigne le signe de v)

2. Utiliser un changement de variable convenable pour montrer que l'équation (2) est équivalente à une équation linéaire que l'on doit préciser. Résoudre cette dernière équation linéaire en déduire la solution de l'équation (2) sachant que $v(0) = 0$.

SOLUTION 3

1. On a $v(x) = x'(t)$ donc $x''(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v'(x)\, x'(t) = v'(x)\, v(x)$ *2 points*

   $x'|x'| = v|v| = \sigma v^2$ *2 points*

   L'équation (1) s'écrit : $v'v + \omega^2 x + \sigma r v^2 = 0 \Longleftrightarrow v' + \sigma r v = -\omega^2 x v^{-1}$

   donc c'est une équation de Bernoulli, $\alpha = -1$ *2 points*

2. Posons $z = v^2 \Longrightarrow z' = 2vv'$

   $(2) \Longrightarrow \dfrac{z'}{2} + \sigma r z = -\omega^2 x$

   ESSM $\dfrac{z'}{2} + \sigma r z = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx} = -\sigma r z \Longleftrightarrow \dfrac{dz}{z} = -2\sigma r dx$

   $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = -2\sigma r \int dx \Longrightarrow \ln z = -2\sigma r x + C$ soit $z = Ke^{-2\sigma r x}$ *5 points*

   EASM On propose la solution particulière $z = f(x)\, e^{-2\sigma r x}$ donc $z' = f' e^{-2\sigma r x} - 2\sigma r f e^{-2\sigma r x}$ *2 points*

   $\dfrac{z'}{2} + \sigma r z = -\omega^2 x \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\left(f' e^{-2\sigma r x} - 2\sigma r f e^{-2\sigma r x}\right) + \sigma r f e^{-2\sigma r x} = -\omega^2 x$

   On trouve : $\dfrac{1}{2} f' e^{-2\sigma r x} = -\omega^2 x$ alors $f' = -2\omega^2 x e^{2\sigma r x}$

   $f(x) = -2\omega^2 \int x e^{2\sigma r x} dx = \dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}(1 - 2\sigma r x)\, e^{2\sigma r x}$

   $z_p = \dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}(1 - 2\sigma r x)\, e^{2\sigma r x} e^{-2\sigma r x} = \dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}(1 - 2\sigma r x)$ *5 points*

   La solution générale de l'EASM est : $z(x) = Ke^{-2\sigma r x} + \dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}(1 - 2\sigma r x)$ *2 points*

   $v(x) = \pm\sqrt{Ke^{-2\sigma r x} + \dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}(1 - 2\sigma r x)}$

   $v(0) = 0 \Longleftrightarrow K + \dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2} = 0 \Longrightarrow K = -\dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}$ *3 points*

   on obtient : $v(x) = \pm\sqrt{-\dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}e^{-2\sigma r x} + \dfrac{\omega^2}{2r^2\sigma^2}(1 - 2\sigma r x)}$ soit finalement :

$$v(x) = \pm\frac{\omega}{2r\sigma}\sqrt{1 - 2\sigma r x - e^{-2\sigma r x}}$$ *2 points*

Exercice 4 (25 points) Traiter au choix une question, parmis les deux suivantes

1. Soit la série entière en x, $S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$

   (a) Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence de $S(x)$

   (b) Trouver dans le domaine ouvert de convergence de $S(x)$, la somme de la série dérivée $S'(x)$, en déduire la somme $S(x)$.

   (c) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ et préciser le domaine de convergence de cette série. Déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n\geq 0} (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n+1}})$

2. Soit l'intégrale

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x}$$

   (a) Calculer l'intégrale $J(t) = \int \frac{dt}{3t^2+2t+3}$

   (b) Soit $\varphi(\theta) = \arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta}$ Montrer que $\varphi(\theta) = const. = \frac{\pi}{2}$

   (c) On utilisant le changement de variable : $t = \tan\frac{x}{2}$. Calculer I.

SOLUTION 4

1. $S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$

   (a) $u_n = \frac{x^n}{n(n-1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,n}\frac{n\,(n-1)}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n-1}{n+1}x\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)|x| = |x|$$

   La série converge si $|x| < 1$ et elle diverge si $|x| > 1$ donc $R = 1$. *3 points*

   Si $x = 1$: $S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \sim \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$, d'après Riemann ; la série converge *2 points*

   Si $x = -1$: $S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ série alternée avec $\frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ la série converge *2 points*

   Alors le domaine de convergence est : $D = [-1, 1]$ *1 point*

   (b) $S'(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{nx^{n-1}}{n(n-1)} = \sum_{n\geq 2} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = -\ln(1-x)$ *2 points*

   $S(x) = -\int_0^x \ln(1-t)\,dt$

   Par parties : $\begin{cases} u = \ln(1-t) & \Longrightarrow du = -\frac{dt}{1-t} \\ dv = dt & \Longrightarrow v = t \end{cases}$ *2 points*

   $S(x) = -\,t\ln(1-t)|_0^x - \int_0^x \frac{tdt}{1-t} = x + \ln(x-1) - x\ln(1-x)$ *2 points*

(c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2\left(1-x/2\right)}$ *1 point*

$=\sum_{n\geq 0}x^n-\dfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(x/2)^n=\sum_{n\geq 0}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$ *2 points*

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\dfrac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}x\right|=|x|\Longrightarrow R=1$ *2 points*

Pour $x=\pm 1$: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(\pm 1)\neq 0$ donc la série diverge alors $D=\,]-1,1[$ *1 point*

Soit $x=\dfrac{1}{2}\in D$:

$=\sum_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{2n+1}}\right)=\sum_{n\geq 0}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\dfrac{1}{2^n}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(1/2-1\right)\left(1/2-2\right)}=\dfrac{4}{3}$ *5 points*

2. $J=\displaystyle\int\frac{dt}{3t^2+2t+3}$

(a) Pour calculer $J(t)$, on va mettre le polynôme du dénominateur sous forme canonique :

$3t^2+2t+3=3\left(t^2+\dfrac{2}{3}t+1\right)=3\left(\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+1-\dfrac{1}{9}\right)=3\left(\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{8}{9}\right)$ *3 points*

$J(t)=\displaystyle\int\frac{dt}{3t^2+2t+3}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2}$ *3 points*

On a $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{1}{a}x$

donc $J(t)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{\sqrt{8}}\arctan\dfrac{t+1/3}{\sqrt{8}/3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\arctan\dfrac{3t+1}{\sqrt{8}}+C$ *4 points*

(b) $\varphi(\theta)=\arctan\theta+\arctan\dfrac{1}{\theta}\Longrightarrow\varphi'(\theta)=\dfrac{1}{1+\theta^2}+\dfrac{-1/\theta^2}{1+(1/\theta)^2}=0$ *2 points*

Donc $\varphi(\theta)=const.$, en particulier $\varphi(1)=\arctan 1+\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ *3 points*

(c) $t=\tan(x/2)$ donc $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ et $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ si $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ alors $t=\pm 1$ *3 points*

$I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{3+\sin x}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int_{-1}^{1}\frac{2dt}{3+2t+3t^2}=2J(t)|_{-1}^{1}=2\left(J(1)-J(-1)\right)$

3 points

$=\dfrac{2}{\sqrt{8}}\left(\arctan\dfrac{3+1}{\sqrt{8}}-\arctan\dfrac{-3+1}{\sqrt{8}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2}+\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ *4 points*

$\left(\theta=\sqrt{2}\right)$