n° 27

Hamming(7,4) = H(3) ; $n=7$, $k=4$, $r=3$.

nb de bits de donnée $= k = 4$

nb de bits de contrôle $= r = 3$.

longueur du mot de code $n = k + r = 7$.

Ds la matrice de contrôle, chaque colonne doit être distinct d'une autre $H \in M_{r,n}(\mathbb{Z}) = M_{3,7}(\mathbb{Z})$ couvre en colonnes les élt de $\mathbb{Z}^r - \{0\} = \mathbb{Z}^3 - \{000\}$.

à une permutation près, soit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

les r bits de contrôle sont placés aux positions 2^i d'un vecteur, c tq $H\,{}^tc = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = 0.$$

les bits de contrôle sont c_1, c_2, c_4 $(2^0=1, 2^1=2, 2^2=4)$

tq $\begin{cases} c_1 + c_3 + c_5 + c_7 = 0 \\ c_2 + c_3 + c_6 + c_7 = 0 \\ c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 0 \end{cases}$

on écrit les bits de contrôle en fonct. des bits de ~~contrôle~~ données

$$\begin{cases} c_1 = c_3 + c_5 + c_7 \\ c_2 = c_3 + c_6 + c_7 \\ c_4 = c_5 + c_6 + c_7 \end{cases}$$

or

$C = D \cdot G$ (mot de code)

on cherche G tq $C = D \cdot G$ avec D bits de donnée.

$$(c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ c_6\ c_7) = (c_3\ c_5\ c_6\ c_7) \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' & g' \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e'' & f'' & g'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' & e''' & f''' & g''' \end{pmatrix}$$

c.a.d.

$a \cdot c_3 + a' c_5 + a'' c_6 + a''' c_7 = c_1 = c_3 + c_5 + c_7$:

$a = a' = a''' = 1$, $a'' = 0$.

$b c_3 + b' c_5 + b'' c_6 + b''' c_7 = c_2 = c_3 + c_6 + c_7$:

$b = b'' = b''' = 1$, $b' = 0$.

$c c_3 + c' c_5 + c'' c_6 + c''' c_7 = c_3$

$c = 1$, $c' = c'' = c''' = 0$

etc ...

On trouve $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

) on coupe la suite à coder en blocs de longueur 4

1001|0100|1010

on code chaque bloc D par C = D.G.

(1001).G = 0011001

(0100).G = 1001100

(1010).G = 1011010.

la suite de bits

100101001010 est codée par 001100110011001011010

3) les mots du code ont une longueur de 7 bits, il faut donc découper la suite de bits par blocs de longueur 7

1110110 | 0110101 | 0111000 | 1100111

le codage de Hamming permet de corriger 1 erreur dans un mot de n bits

pour decoder le message reçu, il suffit de detecter la position du bit erroné.

si C est l'origine du mot reçu C'

C message envoyé, et il est reçu comme C'

si HC = 0 alors pas d'erreur (C ⊥ H)

on a HC' = HC' − HC = H(C' − C)

0

dans un codage de Hamming $c' - c$ (4)

contient un seul 1 car on a une seule erreur.

donc $H(c'-c)$ c'à d Hc' représente

une colonne de H dont l'indice repp représente

la case où il y a erreur.

Pr décoder ~~to~~. $c' = 1~~1~~1\,0\,1\,1\,0$

$Hc' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est la 3è colonne de H

donc l'erreur est ds la 3è case, $c' = 111\,0110$

est décodé en 0110. (longueur est 4).

$c' = 011\,0101$ (on avait supposé que $c_3 c_5 c_6 c_7$) bits de données)

$Hc' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc erreur à la 3è positi°

c' est décodé en $c = 0101$

$c' = 0111\,000$; $Hc' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5è colonne de H

donc erreur à la 5è position

c' est décodé en 1010.

$c' = 110\,0111$; $Hc' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 7è colonne de H donc

erreur à la 7è position c' est codé en 0110.

D'où le message est décodé en :

$0110\;0101\;1010\;0110$.