Solut° MVA 004 - rattrapage 2018. **D**

J. Saab

Ex 1

1) $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} l_1 \oplus l_2$ (3 pts)

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} l_1 \oplus l_2 \oplus l_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} l_1 \oplus l_3$

2)

000	000000
001	001110
010	010011
011	011101
100	100111
101	101001
110	110100
111	111010

$c(\alpha) = \alpha . G$

(4 pts)

3) $d_{min} = \min(W(c)) = 3$ (1 pt) donc on peut corriger $e = 1$. (1 pt)

4) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2 pts)

5) on a ${}^tH = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2 pts)

le tableau des syndrômes est :

000	000000
100	000100
010	000010
001	000001
110	001000
011	010000
101	000101
111	100000

3 pts

- $\sigma(\alpha) = \sigma(100000) = \sigma(\beta)$

soit $e = 100000$

$c = e \oplus \alpha = 100111$ est une correction de α (1 pt)

- soit $e' = e \oplus \beta = 010011$ une correction de β. (1 pt)

- $\sigma(\gamma) = \sigma(000010) = \sigma(e')$

soit $c'' = \gamma \oplus e' = 111010$ une correction de γ. (1 pt)

c) les polynômes de Code Smt

$a = 0$; $b = x^5 + x^2 + x + 1$; $c = x^4 + x + 1$; $d = x^3 + x^2 + x$

$e = x^5 + x^4 + x^2$; $f = x^4 + x^3 + x^2 + x$; $g = x^5 + x^3 + 1$; $h = x^5 + x^4 + x^3 + x$

0.5 x 8 = 4 pts

$d = x^3 + x^2 + x$ est de p.p. $d° = r = 3$.

$b = x^5 + x^2 + x + 1 = d.(x^2 + x) + (x+1)$

n'est pas multiple de d donc le Code n'est pas polynômial. (2 pts)

Ex 2

$g(x) = x^3 + x + 1$

1) $k = 6 - 3 = 3$; $r = d^{\circ} g(x) = 3$.   2 pts

2) $x^6 + 1 = (x^3 + x + 1)\, g(x) + (x^2 \ldots)$

$g(x)$ ne divise pas x^6+1 donc le code n'est pas cyclique   3 pts

3) 000 sera codé par 000000

$m_1 = 100$, le polynôme de code de m_1 est

$P_{m_1}(x) = i'(x) \cdot x^{n-k} + r$

m_1, m_2, m_3 : $3+3+3 =$ 9 pts
m_4, m_5, m_6, m_7 : $1+1+1+1 =$ 4 pts

$i'(x) = x^2$ associé à $m_1 = 100$

$P_{m_1}(x) = x^5 + r$; r est le reste de la division de

x^5 par $g(x)$: $x^5 = g(x) \cdot (x^2+1) + x^2 + x + 1$

$P_{m_1}(x) = x^5 + x^2 + x + 1$ et m_1 est codé par 100111.

$m_2 = 010$; $P_{m_2}(x) = x^4 + r$

$x^4 = (x^3 + x + 1)\, x + \underline{x^2 + x}$; $P_{m_2}(x) = x^4 + x^2 + x$

$m_2 \longrightarrow 010110$

$m_3 = 001$; $P_{m_3}(x) = x^3 + r$;

$x^3 = (x^3 + x + 1) \cdot 1 + \underline{x + 1}$; $P_{m_3}(x) = x^3 + x + 1$

$m_3 \longrightarrow 001011$.

$m_4 = 110 = m_1 + m_2 \longrightarrow 110001$; $m_5 = 101 = m_1 + m_3 \longrightarrow 101100$

$m_6 = 011 = m_2 + m_3 = 011101$; $m_7 = 111 = m_6 + m_1$

$m_7 \longrightarrow 111010$.

4)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 2 pts

5) $m = 111101 = a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$

$P_{\nabla(m)} = a_0 r_0(x) + a_1 r_1(x) + a_2 r_2(x) + a_3 r_3(x) + a_4 r_4(x) + a_5 r_5(x)$.

$= r_0 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$.

r_i est le reste de la division de x^i par $g(x)$.

$r_0 = 1$; $r_1 = x$; $r_2 = x^2$; $r_3 = x+1$; $r_4 = x^2 + x$; $r_5 = x^2 + x + 1$

$P_{\nabla(m)} = 1 + x^2 + x + 1 + x^2 + x + x^2 + x + 1$

$= x^2 + x + 1$

3 pts

$\nabla(m) = 111$.

<u>2e methode:</u> $P_m(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$P_m(x) = (x^3 + x + 1)(x^2 + x) + x^2 + x + 1$; $\nabla(m) = 111$.

6) $\nabla(m) \neq 000$ donc <u>m n'est pas un mot de code</u> 2 pts

<u>Ex 3</u>

1) ab ; ab^2 ; ab^3 ; $abab$; 4 pts

2)
$$\begin{cases} D_1 = aD_2 + bD_6 \\ D_2 = aD_6 + bD_3 \\ D_3 = \varepsilon + aD_4 + bD_5 \\ D_5 = aD_6 + bD_5 + \varepsilon \\ D_6 = (a+b)D_6 = \emptyset \\ D_4 = aD_6 + bD_3 = bD_3. \end{cases}$$ 6 pts

$\Rightarrow$

3)
$$\begin{cases} D_5 = b^* \\ D_3 = abD_3 + b^* + \varepsilon = abD_3 + b^*. \\ D_3 = (ab)^*(b^*). \\ D_2 = b(ab)^*b^* \\ D_1 = ab(ab)^*b^* \end{cases}$$ 4 pts

$L = D_1 = (ab)^+ b^*$. 2 pts

4) $\begin{cases} D_1 = a D_2 \\ D_2 = b D_3 \\ D_3 = a D_4 + b D_5 + \varepsilon \\ D_4 = b D_3 \\ D_5 = b D_5 + \varepsilon \end{cases}$ donc $D_2 \equiv D_4$ ($2 \sim 4$).

5 pts

(3) :

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & 1 \arrow[r, "a"] & \{2,4\} \arrow[r, shift left, "b"] & (3) \arrow[l, shift left, "a"] \arrow[r, "b"] & (5) \arrow[loop above, "b"] \end{tikzcd}$$

5)

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[d, "b"] \\ & & (3) \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[loop right, "b"] \end{tikzcd}$$

(c)

4 pts

Ex4 :

$A + B = C^{-1}$ **4 pts**

$|C| = -(3) = -3 \neq 0$ **5 pts**

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \, {}^t\mathrm{com}(C) = -\frac{1}{3} \, {}^t\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ **2 + 8 = 10 pts**

$$A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -2 & 2/3 \\ -\frac{4}{3} & 1 & -5/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$ **6 pts**